

基于工程优化问题的广义变分不等式模型研究

兰恒友, 唐建芳, 张 丹

(四川理工学院理学院, 四川 自贡 643000)

摘 要: 文章介绍基于工程优化问题的广义变分不等式及其相关问题, 以实例说明变分不等式集中用于非线性规划、经济学、工程学、社会科学和自然科学中的建模、计算和许多平衡(或称为均衡)问题, 并给出了广义变分不等式的研究进展。

关键词: 工程优化问题; 数学建模; 变分不等式; 研究进展

中图分类号: O 178 N945. 12

文献标识码: A

引 言

美国当代数学家保罗·哈尔莫斯(P. R. Halmos)在《数学的心脏》一文中指出:“数学家存在的理由, 就是解决问题。因此, 数学的真正组成部分是问题和解”。事实上, 在解决大量产生于工程实践的优化问题过程中, 都急需要用数学语言来描述实际——数学建模。

自 20 世纪 60 年代中期, 科特(Cottle), 丹茨格(Dantzig), 莱姆克(Lemke), 斯坦帕基亚(Stancu)及其他许多数学工作者提出并研究变分不等式和线性、非线性补问题以来, 变分不等式和线性、非线性补问题在数学规划中已扮演了非常重要的角色, 它们集中用于经济学、工程学、社会科学和自然科学中的建模、计算和许多平衡(或称为均衡)问题的分析。

刚过去的 24-29 年证明, 变分不等式和补问题方面的研究工作已经取得了持续的进展。作为研究经济、运输和对策论的平衡的统一框架——一种能促进平衡问题的高效率的算法框架, 在上述问题中的应用使人们的兴趣更加浓烈, 从而激励了这种发展趋势^[1-29]。

也正是这种激励, 使我们在本文介绍基于工程优化问题的变分不等式及其相关问题, 以理解当今潮流般地研究变分不等式的研究现状。

1 原始的变分不等式问题

变分不等式始于一些力学问题的研究, 早在 1933

年西尼奥里尼(Signorini)研究一个线性弹性体和刚性体的无摩擦接触问题时, 就导出了被称为 Signorini 问题的变分不等式^[21]。

例 1 (可微函数的极值问题) 设 $f \in C^1([a, b], R)$, 求 $x_0 \in [a, b]$ 使得

$$f(x_0) = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$$

由维尔斯特拉斯(Weierstrass)定理知, 这样的 x_0 存在, 且 (i) 当 $x_0 \in (a, b)$ 时, 有 $f'(x_0) = 0$ (ii) 当 $x_0 = a$ 时, 有 $f(x_0) \geq 0$; (iii) 当 $x_0 = b$ 时, 有 $f(x_0) \leq 0$ 因而 x_0 不论是那种情形, 都有

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

于是按 R 中的内积即得变分不等式:

$$[f'(x_0), x - x_0] \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad (1)$$

变分不等式的现代数学理论起源于经典的极值问题, (1) 就是最简单的变分不等式, 这一简单的不等式可加以推广, 从而能反映许多物理现象^[4], 比如弹性梁的障碍问题, 不可压缩弹性体的单向接触问题, 土坝渗流问题。

令 R^n 为 n 维欧氏空间, $T: R^n \rightarrow R^n$ 为非线性函数。找 $x_0 \in R_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$ 使得

$$\langle Tx_0, x - x_0 \rangle \geq 0 \quad \forall x \in R_+^n \quad (2)$$

(2) 被称为原始变分不等式。

令 $K \subset R^n$ 为非空闭凸集, $T: R^n \rightarrow R^n$ 为非线性函数。找 $x_0 \in K$ 使得

$$\langle Tx_0, x - x_0 \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K \quad (3)$$

收稿日期: 2010-01-05

基金项目: 四川省青年科技基金项目 (08ZQ026-008); 人工智能四川省(高校)重点实验室开放基金项目 (2008RQ002, 2009RZ001); 四川理工学院大学生创新基金项目 (2009-2010-147)

作者简介: 兰恒友(1969), 男, 四川资中人, 教授, 硕士, 主要从事运筹与优化、非线性分析及应用方面的研究。 <http://www.cnki.net>

(3)被称为一般的变分不等式。特别地,在(3)中,取 $n = 1, K = [a, b], T = f'$ 即可得例 1

2 广义变分不等式模型

设 $X \subseteq R^n$ 是一非空闭凸集, $u: R^n \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ 为下半连续的真凸函数, $F: \text{dom } u \cap X \rightarrow R^n$ 是 $\text{dom } u \cap X$ 上的向量值连续函数, 这里 $\text{dom } u = \{x \in R^n \mid u(x) < +\infty\}$ 是 u 的有效域。1999年, Patrksso^[5] 引入如下的广义变分不等式问题 $GVIP(F, u, X)$, 并研究了非线性规划和 $GVIP(F, u, X)$ 之间的关系, 对一重要的成本 (Cost) 逼近算法结构进行了收敛性分析: 求 $x^* \in R^n$ 使得:

$$F(x^*) + \partial u(x^*) + N_X(x^*) \in \emptyset$$

其中 ∂u 为 u 的次微分算子, 即对任意的 $y \in R^n, \partial u(x) = \{\xi \in R^n \mid u(y) \geq u(x) + \xi^T(y-x)\}, N_X$ 为 X 的法向导算子, 即

$$N_X(x) = \begin{cases} \{z \in R^n \mid z^T(y-x) \leq 0 \forall y \in X\}, & x \in X, \\ \emptyset, & x \notin X. \end{cases}$$

广义变分包含 $GVIP(F, u, X)$ 及其各种特例在数学科学和工程科学中有大量不同的应用, 仅例举下面四个方面略说明之 (见文献 [3-6-8] 及其他相关的参考文献)。

2.1 非线性规划问题

定义 2.1 设 X 是有限维欧氏空间 R^n 的非空子集, $F: R^n \rightarrow R^n$ 为非线性函数。下述问题称为变分不等式问题 $VI(X, F)$: 寻一向量 $x^* \in X$, 使得

$$F(x^*)^T(y-x^*) \geq 0 \quad \forall y \in X.$$

命题 2.1 $x^* \in X$ 是 $VI(X, F)$ 的解当且仅当 $F(x^*)$ 是在 x^* 处到 X 的内向法线, 即 $-F(x^*)$ 属于法锥面 $N_X(x^*)$, 这里

$$N_X(x) = \begin{cases} \{z \in X \mid (y-x)^T z \leq 0 \forall y \in X\}, & x \in X, \\ \emptyset, & x \notin X. \end{cases}$$

关于变分不等式问题, 这里首先给出一个最简单的例子:

例 2 求解一方程

$$F(x) = 0 \tag{4}$$

其中 $F: R^n \rightarrow R^n$ 为非线性函数。易知, 如果 $X = R^n$, 则 x^* 是 $VI(X, F)$ 的解当且仅当 x^* 满足方程 (4)。事实上, 在 R^n 的所有的锐角向量中, 只有 $F(x^*)$ 才是零向量。

下面, 我们再给出一个可微优化的例子:

例 3^[9] 如果 $F(x)$ 是实值可微函数 $f: R^n \rightarrow R$ 的梯度, X 是凸的, 则 $VI(X, F)$ 刚好是下述最优问题的最优性一阶必要条件的重述:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(x) \\ & \text{subject to } x \in X \end{aligned} \tag{5}$$

更特别地, x^* 是 $VI(X, F)$ 的解当且仅当在 x^* 有不可行

下降方向。而且, 如果 $f(x)$ 是伪凸函数 (即如果 $\nabla f(x)^T(y-x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x), \forall x, y \in X$), 则 $VI(X, F)$ 的任何解都是 (5) 的全局最优解。

例 4 考虑如下二次规划问题:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \frac{1}{2}u^T A u + c^T u \\ & \text{subject to } d \leq u \leq h \end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

此问题有唯一最优解 $u^* = [-1, 1, -0.25]^T$ 。由 Karush-Kuhn-Tucker 条件易知, 问题 (6) 等价于下述线性变分问题:

$$(u-u^*)^T(Au^*+c) \geq 0 \quad \forall u \in \Omega$$

其中 $\Omega = \{u \in R^3 \mid d \leq u \leq h\}$ 。

一般地, 如果 F 是连续可微的, 则 F 成为函数 $f: R^n \rightarrow R$ 的梯度函数的充要条件为 Jacobian 矩阵 $\nabla F(x)$ 对所有的 $x \in R^n$ 都是对称的。在这种情况下, 实值函数 $f: R^n \rightarrow R$ 被定义为

$$f(x) = \int_0^1 \nabla F(x^0 + t(x-x^0))^T(x-x^0) dt$$

其中 x_0 是 R^n 中任意一固定向量。因此, $\nabla F(x)$ 的对称性是 $VI(X, F)$ 联络可微数学规划 (5) 的关键。实际上, 在缺少对称性假设下, 一般的方程能否表示成作为可微数学规划的任意变分不等式问题, 仍还没有找到答案。

下文约定 R_+ 表示 R^n 的非负象限。

定义 2.2 设 $F: R^n \rightarrow R^n$ 为非线性函数。定义非线性补问题 $NCP(F)$ 为: 寻 $x^* \in R_+$ 使得

$$F(x^*) \in R_+, F(x^*)^T x^* = 0.$$

注 2.1 当 $F(x)$ 是 x 的仿射函数时, 对某些给定的向量 $q \in R^n$ 和矩阵 $M \in R^n \times n$, 假定 $F(x) = q + Mx$, 则 $NCP(F)$ 问题就退化为线性补问题 $LCP(q, M)$ 。

命题 2.2^[10] 设 $F: R^n \rightarrow R^n$ 为非线性函数。向量 $x^* \in R_+$ 为

非线性补问题 $NCP(F)$ 的解, 当且仅当 x^* 是规划问题

$$\begin{aligned} & \text{minimize } F(x)^T x \\ & \text{subject to } F(x)^T \geq 0, x \geq 0 \end{aligned}$$

的解, 且 $F(x)^T x^* = 0$ 。

定义 2.3 设 X 为 R^n 的非空闭凸子集, G 为 $n \times n$ 的对称正定矩阵, $x_G = (x^T G x)^{1/2}$ 表示向量 $x \in R_+$ 的 G -范数, 则下列数学规划的解 (必须存在且唯一) $\text{Pr}_X(\cdot)$ 称为点 $x^* \in R_+$ 在集合 X 上关于 G -范数

的投影:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } y - x \\ & \text{subject to } x \in X \end{aligned}$$

命题 2.3^[11] 设 X 为 R^n 的非空闭凸子集, G 为 $n \times n$ 的对称正定矩阵, 则 x^* 为 $VI(X, F)$ 的解当且仅当

$$x^* = P_{X, X}(x^* - G^{-1}F(x^*))$$

即当且仅当 x^* 是按下述定义的函数 $H: R^n \rightarrow R^n$ 的不动点:

$$H(x) = P_{X, X}(x^* - G^{-1}F(x))$$

联系到非线性补问题 $NCP(F)$ (这里 $X = R_+^n$), 上述函数 H 的定义可简化为

$$H(x) = \max\{0, x - F(x)\}.$$

此时, G 为单位矩阵. 一般而言, 若函数 $H: R^n \rightarrow R^n$, 则 x^* 为 H 的不动点等价于 x^* 为函数 $\bar{H}(x) = H(x) - x$ 的零点. 从而, 变分不等式和非线性补问题都可表达为求解非线性方程系统的经典问题.

定义 2.4 设 X 为 R^n 中的一凸锥, $F: R^n \rightarrow R^n$ 为非线性函数, 则广义非线性补问题 $GCP(X, F)$ 即是: 寻 $x^* \in X$, 使得

$$F(x^*) \in X^*, F(x^*)^T x^* = 0$$

其中 X^* 为 X 的对偶锥, 即 $X^* = \{y \in R^n \mid y^T x \geq 0 \forall x \in X\}$.

命题 2.4^[12] 设 X 为 R^n 中的凸锥, 则求解广义非线性补问题 $GCP(X, F)$ 等价于求解 $VI(X, F)$.

命题 2.5^[3] 设 $g: R^n \rightarrow R^m$ 和 $h: R^n \rightarrow R^p$ 都为连续可微函数, $X = \{x \in R^n: g_i(x) \leq 0 \ i = 1, 2, \dots, m; h_j(x) = 0 \ j = 1, 2, \dots, p\}$.

(i) 如果 x^* 为 $VI(X, F)$ 的解, 集合 X 在 x^* 处的某一确定约束限定条件成立, 则对于 $\pi^* \in R^m$ 和 $\mu^* \in R^p$, (x^*, π^*, μ^*) 为 $GCP(R^n \times R_+^m \times R^p, H)$ 的解, 这里 $H: R^{n+m+p} \rightarrow R^{n+m+p}$ 定义为

$$H \begin{pmatrix} x \\ \pi \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x) + \sum_{i=1}^m \pi_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla h_j(x) \\ -g(x) \\ h(x) \end{pmatrix}$$

(ii) 反之, 若 $g_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是凸的, $h_j (j = 1, 2, \dots, p)$ 为放射函数, (x^*, π^*, μ^*) 为 $GCP(R^n \times R_+^m \times R^p, H)$ 的解, 则 x^* 也是 $VI(X, F)$ 的解.

众所周知, 不确定性是 (工程) 决策分析中普遍存在的现象, 面临不确定性是对最优化和决策分析的一种永恒的挑战. 由模糊数学构成的不确定性促进了模糊优化和决策分析的研究. 在现实决策问题中包含模糊概念和模糊环境的变分不等式在理论和实践中都变成了一个十分重要的问题.

定义 2.5 下述问题称为 Fuzzy 环境下的变分不等式问题 $VI(X, F, \in)$: 寻 $x \in R^n$, 使得

$$\begin{aligned} & x \in X, \\ & \langle F(x), z - x \rangle \geq 0 \ z \in X, \end{aligned}$$

其中 X 是 R^n 中的凸子集, $F: R^n \rightarrow R^n$ 为一非线性函数, \in 表示“近似地属于”, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积, $\langle F(x), z - x \rangle \geq 0$ 为模糊不等式, \geq 表示“近似地大于等于”.

定义 2.6 称下述问题为 Fuzzy 环境下的广义补问题 $GCP(X, F, \in)$: 寻 $x \in R^n$, 使得

$$\begin{aligned} & x \in X, \\ & \langle F(x), x \rangle \approx 0 \\ & F(x) \in X^*, \end{aligned}$$

其中 X 是 R^n 中的凸锥, \approx 表示“近似地等于”, $X^* = \{y \in R^n \mid \langle y, z \rangle \geq 0 \ \forall z \in X\}$ 为 X 的极 (对偶) 锥.

命题 2.6^[13] 当 X 是 R^n 中的凸锥时, Fuzzy 环境下的变分不等式问题 $VI(X, F, \in)$ 等价于 Fuzzy 环境下的广义补问题 $GCP(X, F, \in)$.

此外, 除了 Fuzzy 环境下的变分不等式和补问题, 还有函数 F 和定义域 X 的不确定性导致的模糊变分不等式和补问题, 我们将其统称为模糊变分不等式和补问题. 在隶属函数的作用下, 模糊变分不等式问题可转化为最优化问题^[13, 14, 22].

2.2 博弈论、经济学和运输分析中的平衡问题

Blum 和 Oettli^[15] 把下面的问题理解为一个平衡问题 (EP): 寻找 $\bar{x} \in X$, 使得

$$f(\bar{x}, y) \geq 0 \ \forall y \in X,$$

其中 X 为一给定的集合, $f: X \times X \rightarrow \bar{R} = R \cup \{\pm\infty\}$ 为一给定的函数. 最近, Cavazzuti 等^[16] 介绍和研究了非合作对策的 Nash 均衡, 变分平衡和动态平衡三者间的关系, 证明了实现函数的最优化将导致 Nash 均衡, 而奖励函数的最优化将致使变分平衡. 经济学 (还有区域科学, 运输理论, 博弈论等等) 的均衡理论的主要目标是要获得均衡的存在性, 讨论均衡的唯一条件, 进行灵敏性分析 (比较性的静态), 以及发展均衡的有效计算算法. 每一个均衡问题的均衡条件都可形式化为变分不等式, 从而体现变分不等式在经济均衡的研究中的概念和理论的相关性 (见文献 [6, 16-17] 及其他相关的参考文献).

考虑取值于非负象限 R_+^k 的价格向量 $p = (p_1, \dots, p_k)$, 诱导总值额外需求函数 $z(p)$ 的交换经济. 为了考虑在恰好价格为零时, 总值额外需求可能变为无界, 假设 $z(p)$ 一般地定义在包含于 R_+^k 的内点 R_{++}^k 的子锥 C 上的 (即 $R_{++}^k \subset C \subset R_+^k$), 当 $z(p)$ 是在 C 上 p 处零度齐次的, 且满足 Walras' 律时, 就假设 $p \cdot z(p) = 0$. 由齐次性假设, 可正规化价格, 使之在下述单形上取值:

$$S^k = \left\{ p \in R_+^k \mid \sum_{i=1}^k p_i = 1 \right\}$$

限制总值需求函数 $z(p)$ 定义在具 C 的 S^k 的交集 D 上, 记 $S \subset D \subset S^k$, 这里 S_k 表示具 R_{++}^k 的 S^k 之交集. 假设

函数 $z(p): D \rightarrow R^+$ 是连续的。特别地, 由 Walras' 律, 有 $p \cdot z(p) = 0, p \in D$ 。
价格向量 $p^* \in D$ 被称为 Walrasian 均衡 (平衡), 如果 $z(p^*) \leq 0$ 。

命题 2.7^[6] 价格向量 $p^* \in D$ 是一 Walrasian 平衡当且仅当它满足变分不等式

$$z(p^*) \cdot (p - p^*) \leq 0, p \in S^k.$$

2.3 投影微分方程和微分包含问题

次梯度方法 (S) 是有用的, 虽然极小化定义在 Hilbert 空间 H 上的连续实值凸函数 f , 通常是无效率的 (参见 [18]), 但它从任意一初值点开始产生了成功的逼近:

$$(S) \quad x^{k+1} \in x^k - \tau_k \partial f(x^k), k = 0, 1, \dots,$$

其中 $\partial f(x^k)$ 为 f 在状态 x^k 处的次微分, 步长 $\tau_k > 0$ 通常是事先设定的。记 $t = \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i$ 为从初始累积到第 k 步, $x(t) = x^k$ 。则 (S) 可自然地成为一种具步长 τ_k 的下述微分包含的显式 Euler 步骤:

$$(CS) \quad \dot{x}(t) \in -\partial f(x(t)), x(0) = x^0.$$

更一般化, 以极小化闭凸集 $C \subset H$ 上的连续凸函数 $f: H \rightarrow R$ 为目标的次梯度投影方法 (SP) 不断地着手选择:

$$(SP) \quad x^{k+1} \in P_C(x^k - \tau_k \partial f(x^k)), x^0 \in C,$$

其中 $k = 0, 1, \dots, P_C$ 表示在 C 上的正交投影。如果将时间连续化, 则 (SP) 就等价于连续次梯度投影方法:

$$(CSP) \quad \dot{x}(t) \in P_{T_x(t)}[-\partial f(x(t))], x(0) = x^0,$$

其中 $T_x = \{c | \lambda(c - x) | \lambda \geq 0, c \in C\}$ 为 C 在 x 处的切线锥面, 并且对任意的方向 $d \in H$, 都有^[19]

$$P_{T_x}(d) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{P_C(x + \tau d) - x}{\tau}, \forall x \in C$$

连续时间的次梯度投影算法 (CSP), 可体现产生累积解集的轨道。

2.4 广义变分不等式及其相关问题

令 R^n 为 n 维欧几里得空间, 在 R^n 上给定一关系 Γ (即 $\Gamma \subset R^n \times R^n$) 及 R^n 的一子集 X , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积。则计算满足下列条件的所有解 (x, y) 的问题就称为广义变分不等式问题 $GP(X, \Gamma)$:

- (i) $x \in X$; (ii) $0 \leq [x' - x, y], \forall x' \in X$;
(iii) $(x, y) \in \Gamma$ 。

当 X 是 Hilbert 空间或自反 Banach 空间的闭凸子集, Γ 为从一个空间到其对偶空间的一些函数时, 许多数学家研究了由极小化问题或偏微分方程导致的传统变分不等式^[20]。Fang 和 Peterson^[8] 限制在 R^n 中研究 $GP(X, \Gamma)$, 在没有单调性假设下, 退化其解的存在性定理, 然后再添加单调性条件去阐明其解集的性质, 最后提出了一个不动点计算方案。相关工作进展, 可参见文献 [26]。

变分不等式 $VI(X, F)$ 或广义变分不等式问题 $GP(X, \Gamma)$ 已推广到无限维的 Hilbert 空间, 甚至 Banach

空间的 (集值) 变分包含问题或预解算子对应下的广义投影动力系统, 其理论已经为研究出现在纯科学和应用科学之中的许多问题提供了有效而强有力的工具。由于新奇而有创造性的技巧和想法的应用, (广义) 变分不等式已经沿不同方向得到了扩展和普及^[21-29]。

3 结束语

变分不等式是一类重要的非线性问题, 它们产生于许多不同领域, 如物理学、工程学和金融管理科学等。与此同时, (广义) 变分不等式及其等价的投影动力系统已逐渐成为了工程优化问题的数学模型, 特别是在求解平衡模型时, 传统的最优化方法和不动点方法均有其自身的优点和不足, 其不足方面主要体现在: 面对大规模的平衡问题的求解, 传统的最优化方法和不动点方法或者缺乏普遍适用性, 或者计算效率低。过去的 20 余年里, 在填补由最优化方法和不动点方法导致的缺陷方面, 有限维变分不等式和非线性补问题的重要性已明显地呈现出来, 特别是, 在其解的存在性、唯一性和灵敏度理论方面, 算法理论和这些熟练的方法已得到了迅速的发展。而且, 除工程优化问题的广义变分不等式模型研究外, 变分不等式及与其相关的相补问题、极大极小不等式问题以及 KKM 原理等的基本理论、基本方法及其进一步发展, 将有利于运输、计划、区域科学、社会经济分析、能量建模和博弈论等方面问题的解决。

参考文献:

- [1] Patriksson M. Non linear Programming and Variational Inequality Problems [M]. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [2] 张石生. 变分不等式及其相关问题 [M]. 重庆: 重庆出版社, 2008.
- [3] Harker P T, Pang J S. Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications [J]. Math Programming 1990, 48: 161-220.
- [4] 史金松. 变分不等式及其应用 [M]. 南京: 河海大学出版社, 1990.
- [5] Patriksson M. A Unified Framework of Descent Algorithms for Nonlinear Programs and Variational Inequalities [D]. Sweden, Linköping: Linköping Institute of Technology, 1993.
- [6] Dafermos S. Exchange price equilibria and variational inequalities [J]. Math Programming 1990, 46: 391-402.
- [7] Flån S D. On finite convergence and constraint identification of subgradient projection methods [J]. Math Programming 1992, 57: 427-437.
- [8] Fang S C, Peterson E L. Generalized variational ine-

- qualities[J]. *J Optim. Theory Appl*, 1982, 38(3): 363-383
- [9] Subramanian P K. A note on least two norm solutions of monotone complementarity problems [J]. *Appl Math Lett*, 1988, 1: 395-397.
- [10] Cottle R W. Nonlinear programs with positively bounded Jacobians[J]. *SIAM J Appl Math*, 1966, 14: 147-158
- [11] Eaves B C. On the basic theorem of complementarity [J]. *Math Programming*, 1971, 1: 68-75
- [12] Karanaridian S. Generalized complementarity problem [J]. *J Optim. Theory Appl*, 1971, 8: 161-167.
- [13] Hu C F. Solving variational inequalities in a fuzzy environment[J]. *J Math Anal Appl*, 2000, 249: 527-538
- [14] Hu C F. Generalized variational inequalities with fuzzy relation [J]. *J Comput Appl Math*, 2002, 146: 47-57.
- [15] Blum E, Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems [J]. *The Mathematics Student*, 1994, 63: 123-145
- [16] Cavazzuti E, Pappalardo M, Passacantando M. Nash equilibria, variational inequalities and dynamical systems [J]. *J Optim. Theory Appl*, 2002, 114(3): 491-506
- [17] Dafermos S, Nagurney A. A network formulation of market equilibrium problems and variational inequalities [J]. *Operations Research Letters*, 1984, 3: 247-250
- [18] Shor N Z. *Minimization Methods for Non-differentiable Functions* [M]. Springer, Berlin, 1985
- [19] Phelps R R. The gradient projection method using Cury's step length [J]. *SIAM J. Control Optim.*, 1986, 24: 692-699
- [20] Brézis H. *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions Dans les Espaces de Hilbert* [M]. Holland, Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1973
- [21] 陈一鸣. Signorini 接触问题的边界元方法及收敛性分析 [J]. *燕山大学学报*, 2004, 28(1): 22-24, 28
- [22] Lan H Y. An approach for solving fuzzy implicit variational inequalities with linear membership functions [J]. *Comput Math Appl*, 2008, 55(3): 563-572
- [23] Lan H Y. Approximation solvability of nonlinear random (A, η) -resolvent operator equations with random relaxed cocoercive operators [J]. *Comput Math Appl*, 2009, 57(4): 624-632
- [24] Lan H Y, Cui Y S. A neural network method for solving a system of linear variational inequalities [J]. *Chaos Solitons Fractal*, 2009, 41(3): 1245-1252
- [25] Lan H Y, Cai L C. Variational convergence of a new proximal algorithm for nonlinear general A -monotone operator equation systems in Banach spaces [J]. *Nonlinear Anal. Series A: TMA.*, 2009, 71(12): 6194-6201.
- [26] 薛金. 混合单调算子的不动点问题探讨 [J]. *四川理工学院学报: 自然科学版*, 2009, 22(1): 21-22
- [27] 杨丽. 自反 Banach 空间中 m -增生算子零点的迭代逼近 [J]. *四川理工学院学报: 自然科学版*, 2009, 22(2): 15-17.
- [28] 谢静, 何中全. 一类广义混合向量拟平衡问题解的存在性及稳定性 [J]. *四川理工学院学报: 自然科学版*, 2008, 21(6): 13-16
- [29] 李润梅, 汤淑明, 王飞跃. 动态用户最优的变分不等式分配模型研究综述 [J]. *交通运输系统工程与信息*, 2006, 6(2): 38-45

Study of Variational Inequality Modelling Based on Engineering Optimization Problems

LAN Heng-you, TANG Jian-fang, ZHANG Dan

(School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract In this paper, a generalized variational inequality and its relative problems based on engineering optimization problems is introduced. The examples presented in this paper show that variational inequality problems are applying in nonlinear programming, economics, engineering modelling in social science, natural science, and many equilibrium problems. Furthermore, the research progresses on generalized variational inequality problems are given.

Key words engineering optimization problem; mathematical modelling; variational inequality; research progress