

对形如 $\sqrt{n^2 + ln + k}$ 的十分位问题的讨论

董永春

(阿坝师范高等专科学校数学系, 四川 郫县 611741)

摘要: 对于实数 x , 设 $d(x)$ 是 x 的十进制表示中的十分位数。对正整数 l 和 k 的形如 $\sqrt{n^2 + ln + k}$ ($l, n = 1, 2, \dots, 9$) 取值进行研究, 用初等方法, 完整的讨论了取 $1, 2, \dots, 9$ 时的可能性, 及对应的 n 的范围。

关键词: 十分位数; 取整函数; 十分位函数 $d(x)$; 小数部分

中图分类号: O156

文献标识码: A

引言

对于实数 x , 将 x 表示成十进制以后, 数点后面第一位数字称为记位 $d(x)$, 对正整数 n 和非负整数 k 设 $f(n, k) = \sqrt{n^2 + ln + k}$, $f(n, k)$ 的十分位 $d(f(n, k))$, 对给定的整数 k , 存在仅有关于 l 的常数 $c(l, k)$, 当 $n \geq c(l, k)$ 必有 $d(f(n, k)) = 5$ 乐茂华和 M. Bencze^[1,2] 对较小的 k 算出 $c(1) = 4, c(2) = 9, c(3) = 13$, 乐茂华^[2,3] 证明了对任意正整数 $k, c(k) = 5k - 1$, Bencze 和王勇^[4] 证明了对任意的 $f(n, k, 3)$ 当 $k \geq 3$ 时 $c_3(k) = 5k - 12$ 。

1 问题的提出

定理 1 若 $n > c(l, k)$ 且 $k \geq \left\lceil \frac{l^2}{4} \right\rceil + 1$ 时,

$$d(\sqrt{n^2 + ln + k}) = 5$$

定理 2 若 $n < c(l, k)$ 且 $k \leq \left\lceil \frac{l^2}{4} \right\rceil - 1$ 当 $n >$

$$\left\lceil \frac{(5l - 1)^2}{20} \right\rceil - 5k + 1 \text{ 时, } d(\sqrt{n^2 + ln + k}) = 4 \text{ 当}$$

$$\left\lceil \frac{(5l - (5 - m))^2}{40 + 20(3 - m)} - \frac{5k}{5 - m} \right\rceil + 1 \leq n < \left\lceil \frac{(5l - (4 - m))^2}{20(4 - m)} - \frac{5k}{4 - m} \right\rceil - 1, m = d(\sqrt{n^2 + ln + k}) (m = 1, 2, 3); \text{ 当}$$

$$\left\lceil \frac{5k}{m - 4} - \frac{(5l + (m - 4))^2}{40 + 20(m - 6)} \right\rceil + 1 \leq n < \left\lceil \frac{5k}{m - 5} - \frac{(5l + m - 5)^2}{20 + 20(m - 6)} \right\rceil - 1, m = d(\sqrt{n^2 + ln + k}) (m = 6, 7, 8)。$$

2 若干引理及定理的证明

引理 1^[3] 若 $l = 3, k \geq 3$ 则 $n \geq 5k - 12$, 有 $d(\sqrt{n^2 + ln + k}) = 5$

证明 当 $l = 3$ 时, $\sqrt{n^2 + 3n + k} - (n + 1) \geq 0.5$ 得 $k \geq 3, \sqrt{n^2 + 3n + k} - (n + 1) < 0.6$ 则 $n \geq 5k - 12$

引理 2^[1] 当 $k = 1, n \geq 5$ 时, $d(\sqrt{n^2 + 3n + 1}) = 4$ 当 $k = 2$ 时, $n \in \mathbb{N}^+$ 时 $d(\sqrt{n^2 + 3n + 2}) = 4$

同理 $l = 5$ 时, 通过类似的操作可以得到^[1], 证明略。现在讨论 $l \geq 7$ 的情况。

(1) 若 $l = 7$, 则 $\sqrt{n^2 + 7n + k} - (n + 3) \geq 0.5 \Rightarrow k \geq 13, \sqrt{n^2 + 7n + k} - (n + 3) < 0.6 \Rightarrow n > 5k - 64$

情况 1 若 $k \geq 13$ 则 $n \geq 5k - 64$ 时, $d(\sqrt{n^2 + 7n + k}) = 5$

① $k = 1$ 时, $\sqrt{n^2 + 7n + 1} - (n + 3) < 0.5$ 显然 $\sqrt{n^2 + 7n + 1} - (n + 3) \geq 0.4 \Rightarrow n \geq 53$

② $k = 2$ 时, $\sqrt{n^2 + 7n + 2} - (n + 3) < 0.5$ 显然 $\Rightarrow n \geq 48$

③ 当 $k = 3, 4, 5, \dots, 11$ 时, 有 $n \geq 48$

情况 2 ①若 $k = 1, 2, \dots, 11$ 当 $n > 53 - 5(k - 1)$ 时, $d(\sqrt{n^2 + 7n + k}) = 4$

② $k = 12$ 时, $n \in \mathbb{N}^+$ 时, $d(\sqrt{n^2 + 7n + 12}) = 4$

(2) 若 $l = 9$ 则 $\sqrt{n^2 + 9n + k} - (n + 4) \geq 0.5 \Rightarrow k \geq$

21, 由 $\sqrt{n^2 + 9n + k} - (n + 4) < 0$ 6知 $n \geq 5k - 105$

情况 1 若 $k \geq 21, n \geq 5k - 105$ 时, d

$(\sqrt{n^2 + 9n + k}) = 5$

① $k = 1$ 时, 显然 $\sqrt{n^2 + 9n + 1} - (n + 4) \leq 0$ 5 时, $\Rightarrow n \geq 92$

② $k = 2$ 时, $\sqrt{n^2 + 9n + 2} \geq (n + 4) \Rightarrow n \geq 14$

$\sqrt{n^2 + 9n + 2} - (n + 4) \geq 0$ $4 \Rightarrow n \geq 87$

情况 2 ①当 $k = 1, 2, \dots, 19, n > 92 - 5(k - 1)$

时, $d(\sqrt{n^2 + 9n + k}) = 4$

②当 $k = 20, n \in \mathbf{N}^+$ 时, $d(\sqrt{n^2 + 9n + 12}) = 4$

(3) 当 $l = 11$ 时, $\sqrt{n^2 + 11n + k} - (n + 5) \geq 0$ $5 \Rightarrow k$

$\geq 31, \sqrt{n^2 + 11n + k} - (n + 5) < 0$ $6 \Rightarrow n \geq 5k - 156$

情况 1 若 $k \geq 31, n \geq 5k - 156$ 时, d

$(\sqrt{n^2 + 11n + k}) = 5$

情况 2 ①当 $k = 1, 2, \dots, 29, n > 141 - 5(k - 1)$

时, $d(\sqrt{n^2 + 11n + k}) = 4$

②当 $k = 30, n \in \mathbf{N}^+$ 时, $d(\sqrt{n^2 + 11n + k}) = 4$

由引理 2 可以很容易推断出一定存在 $f(l, n, k)$ 使得 $n \geq c(l, k)$ 时, 一定有 $d(f(l, n, k)) = 5 \Leftrightarrow 0 \leq 5 \leq$

$f(l, n, k) - [f(l, n, k)] < 0$ 6 因 $[\sqrt{n^2 + ln + k}] = n + \frac{l-1}{2}(2l) = 1$

(i) $5 \Leftrightarrow n^2 + ln + k \geq n^2 + ln + \frac{l^2}{4} \Rightarrow k \geq \frac{l^2}{4}$

(ii) $\sqrt{n^2 + ln + k} - \left(n + \frac{l-1}{2}\right) < 0$ $6 \Leftrightarrow n^2 + ln +$

$k < n^2 + \frac{n(5l+1)}{5} + \frac{(5l+1)^2}{100} \Rightarrow n > 5k - \frac{(5l+1)^2}{20}$,

得 $c(l, k) = \left[5k - \frac{(5l+1)^2}{20}\right]$, 若 $n > c(l, k)$, 且 $k \geq$

$\left[\frac{l^2}{4}\right] + 1$ 时, $d(\sqrt{n^2 + ln + k}) = 5$ 若 $n < c(l, k)$, 且 1

$\leq k \leq \left[\frac{l^2}{4}\right] - 1$ 时, 当 $n > \left[\frac{(5l-1)^2}{20}\right] - 5k + 1$ 时,

$d(\sqrt{n^2 + 11n + k}) = 4$

(iii) 若 $\sqrt{n^2 + ln + k} - \left(n + \frac{l-1}{2}\right) < 0$ $4 \Rightarrow n <$

$\left[5k - \frac{(5l+1)^2}{20}\right]$, 若 $\sqrt{n^2 + ln + k} - \left(n + \frac{l-1}{2}\right) \geq 0$

$3 \Rightarrow n \geq \left[\frac{(5l-2)^2}{40} - \frac{5k}{2}\right] + 1$ 时, $d(\sqrt{n^2 + 11n + k}) = 3$

经过同样的操作可得:

当 $\left[\frac{(5l - (5-m))^2}{40 + 20(3-m)} - \frac{5k}{5-m}\right] + 1 \leq n <$

$\left[\frac{(5l - (4-m))^2}{20(4-m)} - \frac{5k}{4-m}\right] - 1, m = d(\sqrt{n^2 + ln + k})$

($m = 1, 2, 3$).

当 $\left[\frac{5k}{m-4} - \frac{(5l + (m-4))^2}{40 + 20(m-6)}\right] + 1 \leq n <$

$\left[\frac{5k}{m-5} - \frac{(5l + m - 5)^2}{20 + 20(m-6)}\right] - 1, m = d(\sqrt{n^2 + ln + k})$

($m = 6, 7, 8$). 以上讨论了 $d(\sqrt{n^2 + 11n + k}) = 1, 2, \dots, 9$ 的情形, 即 l 为奇数时的情形, 若 l 为偶数, 则当 n 趋

于无限大时, $d(\sqrt{n^2 + 11n + k}) = 0$

参考文献:

[1] 乐茂华. 关于平方根的十分位的| 个猜想 [J]. 池州师专学报, 2006, 20(5): 2-5
[2] Bencze M. A bout elementary inequalities and its applications [J]. Octogon Math Mag 2005 (1A).
[3] 乐茂华. 关于平方根的十分位的| 个猜想 [J]. 滁州学院学报, 2007, 9(3): 1-2
[4] 王勇. 关于平方根的十分位的推广 [J]. 中国科技信息, 2009, (4): 108-111

Discussion for Decimal of Integers Such as $\sqrt{n^2 + ln + k}$

DONG Yong-chun

(Department of Mathematics of ABA Teachers College, Pixian 611741, China)

Abstract As for real number x , assume that $d(x)$ is the decimal representation in the decile of x . This paper is mainly to analyze the decimal of integers l and k in the form $\sqrt{n^2 + ln + k} (l, n) = 1$. It's a complete description of the possible value $1, 2, \dots, 9$ as well as the corresponding n -range with some basic methods

Key words decile; floor function; decile function $d(x)$; fraction