第 23卷第 1期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol.23 No.1
2010年 2月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Feb. 2010
文章编号: 1673-1549(2010)01-0031-02

一类 p- Laplacian方程解的存在性

李 麟[1,2], 钟 新[2], 易 姚[3]

(1. 四川理工学院理学院, 四川 自贡 643000; 2. 西南大学数学与统计学院, 重庆 400715;
3. 重庆市巴蜀中学, 重庆 400000)

摘 要: 文章主要利用扰动方法结合 Calderon- Zydmound不等式和 Schauder不动点定理研究了一类 p- Laplacian方程: $-\Delta_p u + f(x, u, \nabla u) = h(x)$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 对 f 做合适的假设, 得到这类方程弱解的存在性。

关键词: 扰动方法; Calderon- Zydmound不等式; 弱极大值原理
中图分类号: O176.3 文献标识码: A

本文讨论方程

$$-\Delta_p u + f(x, u, \nabla u) = h(x),\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \qquad (1)$$

解的存在性, 其中 $\Delta_p u = \nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, Ω是 ь^n 上一具有光滑边界 $\partial\Omega$的有界区域。$h \in L^\infty(\Omega)$, f: $\Omega \times$ (9) $\times$ (9)是一个卡氏函数, 即, $f(x, s, \xi)$ 对每个 $(s, \xi) \in$ (9) $\times$ (9)关于 x是可测的和对几乎处处的 $x \in \Omega$关于 (s, ξ) 是连续的。我们对 f做下面的假设:

(f_1) (变号条件) $f(x, s, \xi)s \geqslant 0$, $\forall s \in$ (9), $\xi \in$ (9)。

(f_2) (增长性条件) 存在一个增函数 $b \in C($(9)$^+$, (9)$^+)$, $c \in L(\Omega)$, $c \geqslant 0$使得 $|f(x, s, \xi)| \leqslant b(|s|)(|\xi|^p + c(x))$ 当 f 与 ∇u 无关时, 问题(1)已经有很多结果[1-5], 主要是用变分方法解决问题。在本文中, 因为 f 与 ∇u相关, 变分法不能直接利用, 因此扰动法就是一类有效的解决本问题的方法。本文主要参考文献[6]的思想。我们考虑 $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 定义为

$$-\Delta_p u_\varepsilon + \frac{f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)}{1 + \varepsilon|f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)|} = h(x)$$

因为有变号条件, 我们很容易得到一个 u_ε 的 $W_0^{1,p}$ 估计。对于其一子序列, 在 $W_0^{1,p}$ 中, u_ε弱收敛于 u, 如果我们能证明它也是强收敛, 则问题(1)就存在一个弱解。

定理 1 假设 $(f_1)(f_2)$ 条件存在, 则问题(1)在 $W_0^{1,p}$ 中有一个弱解。

为了证明定理 1的结果需要如下引理。

引理 1 假设 $u_m \subset W_0^{1,p}$ 是 p- Laplacian方程

$$\begin{cases} -\Delta_p u_m = f_m, & x \in \Omega, \\ u_m = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

的序列解, 其中 Ω是 ь^n 中的有界光滑区域。$u_m \rightharpoonup u$ 在 $W_0^{1,p}$ 中弱收敛, $\{f_m\}$ 在 $L^1(\Omega)$ 中有界。则对一 $m \to \infty$ 的子序列, 有在 L^q 中 $|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \to |\nabla u|^{p-2}\nabla u$ 对任何的 $1 \leqslant q < p$和 $|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \to |\nabla u|^{p-2}\nabla u$点态几乎处处成立。

证明 取 $r > n$让 $\varphi_m \in W_0^{1,r}(\Omega)$ 满足

$$\|\varphi_m\|_{W_0^{1,r}(\Omega)} \leqslant 1$$

$$\int_\Omega (|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla\varphi_m dx$$

$$= \sup_{\varphi \in W_0^{1,r}(\Omega),\ \|\varphi\|_{W_0^{1,r}(\Omega)} \leqslant 1} \int_\Omega (|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla\varphi dx$$

由 Calderon- Zydmound不等式[7],

$$\sup_{\varphi \in W_0^{1,r}(\Omega),\ \|\varphi\|_{W_0^{1,r}(\Omega)} \leqslant 1} \int_\Omega (|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla\varphi dx \geqslant c^{-1}\|u_m - u\|_{W}(\Omega)$$

其中 $\frac{1}{r} + \frac{1}{r} = 1$, $c = c(n, r)$, 另一方面, 由 Sobolev嵌入定理 $W_0^{1,r}(\Omega)$紧嵌入进 $C^{0,1-\frac{n}{r}}(\Omega)$[7], 由 Ascoli- Arzela定理, 假设 $\varphi_m \rightharpoonup \varphi$在 $W_0^{1,r}(\Omega)$弱收敛, 且在 $\overline{\Omega}$上一致, 因此

收稿日期: 2009-08-18
作者简介: 李 麟(1982-), 男, 重庆合川人, 助教, 硕士生, 主要从事非线性泛函分析方面的研究。

$$\int_\Omega (|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla\varphi_m dx$$
$$= \int_\Omega (|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$
$$(\nabla\varphi_m - \nabla\varphi)dx + o(1)$$
$$= \lim_{l\to\infty}\int_\Omega (|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m - |\nabla u_l|^{p-2}\nabla u_l)$$
$$(\nabla\varphi_m - \nabla\varphi)dx + o(1) \leqslant 2\sup_{l\in N^+}\|f_l\|_{L^1}\|\varphi_m - \varphi\|_{L^\infty} + o$$

当 $q_0 \geqslant 1$时, $|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \to |\nabla u|^{p-2}\nabla u$在 $L^\varphi(\Omega)$中,但是由$H\ddot{o}lder$不等式只要 $q < p$有

$$\||\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\|_{L^p}$$
$$\leqslant \||\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\|_{L^1}^\beta$$
$$\||\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\|_{L^p}^{1-\beta} \to 0$$

其中 $\frac{1}{q} = \beta + \frac{1-\beta}{p}$。

引理 2 定义 $f_\varepsilon(x, s, \xi) = \frac{f_\varepsilon(x, s, \xi)}{1 + |f_\varepsilon(x, s, \xi)|}$, 则,对任意的 $\varepsilon > 0$, $-\Delta_p u + f_\varepsilon(x, u, \nabla u) = h(x)$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$在 $W_0^{1,p}(\Omega)$中有一弱解。

证明 由f_ε定义,我们有 $|f_\varepsilon| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$, 不难验证,对任意的 $\varepsilon > 0$映射 $u \mapsto f_\varepsilon(x, u, \nabla u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$是紧的和有界的。记 $A_\varepsilon(u) = -\Delta_p u + f_\varepsilon(x, u, \nabla u)$为$A(u) = -\Delta_p u + f(x, u, \nabla u)$的扰动问题,在 $W_0^{1,p}(\Omega)$中取足够大的球形邻域,对映射 $u \mapsto (-\Delta_p)^{-1}(h - f_\varepsilon(x, u, \nabla u))$, 由Schauder不动点定理[8]问题(2)有一个解 $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$。

定理 1证明:

因为 $f_\varepsilon(x, s, \xi)s \geqslant 0$有 $< u_\varepsilon, A_\varepsilon u_\varepsilon > \leqslant < u_\varepsilon, h >$。因此 $\alpha\|u_\varepsilon\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant \|h\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_\varepsilon\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$, 由此得到 $\|u_\varepsilon\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant c_1$, 再者,因为非线性项$f_\varepsilon$满足 $f_\varepsilon(x, s, \xi) = \frac{f_\varepsilon(x, s, \xi)}{1 + |f_\varepsilon(x, s, \xi)|}$和 $|f(x, s, \xi)| \leqslant b(|s|)(|\xi|^p + c(x))$, 也可以得到一致的$L^1$界 $\|f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)\|_{L^1} \leqslant c_2$。假设当 $\varepsilon_m \to 0$时,在 $W_0^{1,p}$中 $u_{\varepsilon_m} \rightharpoonup u$, 由引理 1可以假设 $u_m = u_{\varepsilon_m}$, 它在 $W_0^{1,q}$中强收敛,同时 u_m和 $|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m$点态几乎处处收敛,为了证明 u是问题(1)的弱解,利用 Fatou引理首先对序列 u_m引入一直L^∞界。用 u_m乘以逼近方程得到微分不等式

$$-\Delta_p\left(\frac{|u_m|^p}{p}\right) \leqslant -\Delta_p\left(\frac{|u_m|^p}{p}\right) + |\nabla u_m|^{2(p-1)}$$
$$+ u_m f_\delta(x, u_m, \nabla u_m) = hu_m$$
$$\leqslant C(\delta) + \delta\frac{|u_m|^p}{p}$$

其中 $\delta > 0$, 取 $\delta < \lambda_1(-\Delta_p$在 $W_0^{1,p}$中的第一个特征值),由弱极大值原理得到 u_m在 L^∞中一致有界。利用 $\varphi = \xi e^{ru_m}$, $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$非负,计算逼近方程 $A_{\varepsilon_m}(u_m) = h$, 分部积分得到

$$\int_\Omega (r|\nabla u_m|^{2(p-1)} + f_{\varepsilon_m}(x, u_m, \nabla u_m))\xi e^{ru_m}dx$$
$$+ \int_\Omega (|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m |\nabla\xi|^{p-2}\nabla\xi - h\xi)e^{ru_m}dx = 0$$

考虑增长性条 $|f(x, s, \xi)| \leqslant b(|s|)(|\xi|^p + c(x))$和一直界 $\|u_m\|_{L^\infty} \leqslant C_0$, 当 $|r| \geqslant C_0$, 项 $r|\nabla u_m|^{2(p-1)} + f_{\varepsilon_m}(x, u_m, \nabla u_m)$和 r的符号相同,同时这项点态几乎处处收敛。由 Fatou引理,取极限$m \to \infty$, 得到

$$[\xi\exp(ru), A(u) - h] \leqslant 0当 r \geqslant C_0$$

相反

$$[\xi\exp(ru), A(u) - h] \geqslant 0当 r \leqslant C_0$$

由以上讨论,只要非负的 $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$都成立,当然对于 $\xi \in W_0^{1,p} \cap C_0^\infty$且 $\xi \geqslant 0$也成立。令 $\xi = \exp(ru)$, 得到 $[\xi, A(u) - h] \leqslant 0$和 $\geqslant 0$, $\forall \xi \geqslant 0$, $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$。因此, u是问题(1)的弱解。

参 考 文 献:

[1] Bartsch T, Liu Z L. On a superlinear elliptic p-Laplacian equation[J]. J Diff Equations, 2004, 198(1): 149-175.

[2] Damascelli L, Sciunzi B. Regularity, monotonicity and symmetry of positive solutions of m-Laplacian equations [J]. J Diff Equations, 2004, 206(2): 483-515.

[3] Drabek P, Girg P, Takac P. Bounded perturbations of homogeneous quasilinear operators using bifurcations from infinity[J]. J Diff Equations, 2004, 204(2): 265-291.

[4] Papageorgiou E H, Papageorgiou N S. A multiplicity theorem for problems with the p-Laplacian[J]. J Funct Anal, 2007, 244(1): 63-77.

[5] Zhang Z T, Chen J Q, Li S J. Constructions of pseudo-gradient vector and sign-changing multiple solutions involving p-Laplacian[J]. J Diff Equations, 2004, 201 (2): 287-303.

[6] Bensoussan A, Boccardo L, Murat E. On a nonlinear partial differential equation having natural growth terms and unbounded solution[J]. Ann Inst H. Poincare Anal Non Lineaire, 1988, 5(4): 347-364.

[7] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2001.

[8] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis[M]. New York: Springer-Verlag, 1985.

(下转第 35页)

$$\alpha_7 = \frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_{123}}}{2} \bullet \frac{1 + \sqrt{m_3}}{2}$$, 为 O_K 的一组整基。

此处

$$m_i = \frac{m_i m_j}{(m_i, m_j)^2},\ i \neq j$$

$$m_{123} = \frac{m_1 m_2 m_3 (m_1, m_2, m_3)^4}{(m_1, m_2)^2 (m_1, m_3)^2 (m_2, m_3)^2}$$

定理 2的证明。

(1)如果 2在 K 的 7个二次子域中均不分歧, 且 $(m_1, m_2, m_3) \equiv (1, 1, 1) (\mathrm{mod}\ 4)$, 则

$d(1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7) =$

$$\begin{vmatrix}
1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\
1 & \sigma_1(\alpha_1) & \sigma_1(\alpha_2) & \sigma_1(\alpha_3) & \sigma_1(\alpha_4) & \sigma_1(\alpha_5) & \sigma_1(\alpha_6) & \sigma_1(\alpha_7) \\
1 & \sigma_2(\alpha_1) & \sigma_2(\alpha_2) & \sigma_2(\alpha_3) & \sigma_2(\alpha_4) & \sigma_2(\alpha_5) & \sigma_2(\alpha_6) & \sigma_2(\alpha_7) \\
1 & \sigma_3(\alpha_1) & \sigma_3(\alpha_2) & \sigma_3(\alpha_3) & \sigma_3(\alpha_4) & \sigma_3(\alpha_5) & \sigma_3(\alpha_6) & \sigma_3(\alpha_7) \\
1 & \sigma_{12}(\alpha_1) & \sigma_{12}(\alpha_2) & \sigma_{12}(\alpha_3) & \sigma_{12}(\alpha_4) & \sigma_{12}(\alpha_5) & \sigma_{12}(A_6) & R_{12}(A_7) \\
1 & R_{13}(A_1) & R_{13}(A_2) & R_{13}(A_3) & R_{13}(A_4) & R_{13}(A_5) & R_{13}(A_6) & R_{13}(A_7) \\
1 & R_{23}(A_1) & R_{23}(A_2) & R_{23}(A_3) & R_{23}(A_4) & R_{23}(A_5) & R_{23}(A_6) & R_{23}(A_7) \\
1 & R_{123}(A_1) & R_{123}(A_2) & R_{123}(A_3) & R_{123}(A_4) & R_{123}(A_5) & R_{123}(A_6) & R_{123}(A_7)
\end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{m_1 m_2 m_3 (m_1, m_2, m_3)}{(m_1, m_2)(m_2, m_3)(m_1, m_3)} \right)^4 = d(K)$$

其中 $R_{ij} = R_i \# R_j$, $R_{123} = R_1 R_2 R_3$。

所以 $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ 为 K 的一组基。

(2)、(3)两种情形的证明类似。

参 考 文 献:

[1] 纪春岗. (2, 2, , , 2) 型数域的正规整基[J]. 南京师范大学学报: 自然科学版, 1997, 20(1): 56259.

[2] Ji Chungang On Normal Integral Bases[J]. Northeast Math J, 1998, 14(1): 1052111.

[3] Williams K S. Integers of Biquadratic Fields[J]. Canad Bull, 1970, 13: 5192526.

[4] 冯克勤. 代数数论[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[5] 刘丽. 四次域 $Q(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ 的正规整基的存在性[J]. 合肥工业大学学报: 自然科学版, 2006, 29(4): 47251.

[6] 方玲玲. 正规整基及生成元的惟|性[D]. 南京: 南京师范大学硕士学位论文, 2008.

Integral Basis of Triquadratic Number Fields

WANG Zhi2lan

(Department of Mathematics and Physics, Taizhou Teachers College, Taizhou 225300, China)

Abstract On the base of previous studies, the discriminant $d(K)$ and the integral basis $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ of triquadratic number fields $K = Q(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3})$ are studied in the paper. At last, the discriminant and the integral ba2 sis of triquadratic number fields are obtained.

Key words discriminant; integral basis; triquadratic number fields

---

(上接第 32页)

Existence Theorem for a Class of p2Laplacian Equation

LI Lin[1,2], ZHONG Xin[2], YI Yao[3]

(1. School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China;
2. Department of Mathematics and Statistics, Southwest University, Beibei 400715, China;
3. Bashu Middle School of Chongqing, Yuzhong 400000, China)

Abstract The Calderon2Zydmound inequality and Schauder fixed point theorem due to the perturbation method are used to study a class p2Laplacian elliptic equation: $-\nabla_p u + \ (x, u \ u) = h(x), u: W_0^{1,p}(8)$. Under some sufficient con2 ditions of , the equation existence of a weak solution is also proved in the paper.

Key words perturbation method; Calderon2Zydmound inequality; weak maximum principle