

Bergman 空间上的加权复合算子

王汉庆¹, 曾光菊², 周 锋², 柏宏斌²

(1. 四川理工学院教务处, 四川 自贡 643000; 2 四川理工学院理学院, 四川 自贡 643000)

摘 要: 文章首先给出了 Bergman 空间 L_a^2 上加权复合算子, 通过研究该空间上酉加权复合算子和紧自伴加权复合算子的谱、特征向量以及特征子空间, 进一步完善了 Bergman 空间 L_a^2 上加权复合算子的理论。

关键词: 加权复合算子; 酉算子; 特征向量; 特征子空间; 谱

中图分类号: O174.56

文献标识码: A

引 言

设 D 是复平面 C 中的开单位圆盘, $H(D)$ 表示 D 上解析函数集合, $dA(z)$ 是 D 上的面积测度, 定义 Bergman 空间 L_a^2 :

$$L_a^2 = \left\{ f \in H(D) : \int_D |f(z)|^2 dA(z) < \infty \right\} \text{ 对 } f, g \in L_a^2$$

定义 $\langle f, g \rangle = \int_D \bar{g} f dA(z)$, 则 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 L_a^2 上的内积

并且 L_a^2 是 Hilbert 空间, $K_z(w) = \frac{1}{(1 - \bar{w}z)^2}$ 为再生核函数,

$k_z(w) = \frac{(1 - |z|^2)}{(1 - \bar{w}z)^2}$ 为标准再生核函数。

设 $\varphi: D \rightarrow D$ 解析映射, $\psi: \Omega \rightarrow C$ 解析函数, 由 $C_{\varphi, \psi} f = \psi \circ f \circ \varphi, f \in H(D)$, 定义的线性算子 $C_{\varphi, \psi}$ 称为加权复合算子。加权复合算子最早是由 Deddens 为了解决“在 Hardy 空间 $H^2(D)$ 上是否存在一有界解析 Toeplitz 算子与非零紧算子可交换”这一问题提出的, 后来 Forelli 在文献 [1] 中曾经证明过 Hardy 空间 $H^p (p \neq 2)$ 上唯一的满的等距算子就是加权复合算子。显然, 加权复合算子是复合算子和解析 Toeplitz 算子的推广, Cowen 在文献 [2] 中首次对加权复合算子进行了研究。近年来, 文献 [3-4] 对 Hardy 空间 $H^p(D)$ 上这类算子的有界性、紧性进行了研究。然而对 Bergman 空间 L_a^2 上加权复合算子的研究目前主要考虑有界性、紧性、本性范数和谱等线性算子的一些最基本性质。在本文中, 我们探讨 Bergman 空间 L_a^2 上酉加权复合算子的谱、特征向量和

特征子空间等问题, 进一步完善 Bergman 空间 L_a^2 上加权复合算子的理论^[5]。

1 酉加权复合算子

引理 1^[6] 设 $\varphi: D \rightarrow D$ 解析映射, $\phi \in H^\infty, C_{\varphi}: L_a^2 \rightarrow L_a^2$ 是自伴算子, 则 $\phi(0), \varphi'(0)$ 都是实数, 并且 $\phi(z) = \frac{\phi(0)}{(1 - \overline{\varphi(0)z})^2}, \varphi(z) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)z}{(1 - \overline{\varphi(0)z})}$ 。反过来,

若 $a_0 \in D, c$ 和 a_1 都是实数, 并且 $\varphi(z) = a_0 + \frac{a_1 z}{(1 - \overline{a_0}z)}$

是 D 到 D 的映射, $\psi(z) = \frac{c}{(1 - \overline{a_0}z)^2}$, 则 $C_{\varphi}: L_a^2 \rightarrow L_a^2$ 是自伴的。

取 a_0 满足 $|a_0| < 1, a_1 = |a_0|^2 - 1$ 则 $\varphi(z) = \frac{(z - a_0)}{(1 - \overline{a_0}z)}$ 是 D 到 D 的同构, 由引理 1 知 $C_{\varphi}: L_a^2 \rightarrow L_a^2$

是自伴算子当且仅当 $\psi(z) = \frac{c}{(1 - \overline{a_0}z)^2}, c$ 是实数。特别地, 当 $c = 1$ 时, 下面计算 $C_{\varphi} C_{\varphi}$, 由于 $\varphi(z) =$

$$\frac{(z - a_0)}{(1 - \overline{a_0}z)}, \text{ 所以}$$

$$\varphi(\varphi(z)) = \frac{\frac{z - a_0}{1 - \overline{a_0}z} - a_0}{a_0 \frac{z - a_0}{1 - \overline{a_0}z} - 1} = \frac{z - a_0 - |a_0|^2 z + a_0}{a_0 z - |a_0|^2 - \overline{a_0}z + 1} = z$$

对 $f \in L_a^2$, 有

$$C_{\varphi} C_{\varphi} f = C_{\varphi} \psi \circ f \circ \varphi$$

$$= \phi(\phi \circ \varphi) \cdot (f \circ \varphi \circ \varphi)$$

$$= \phi(\phi \circ \varphi)f$$

而

$$\phi(z)(\phi(\varphi(z))) = \frac{1}{(1 - a_0 z)^2}$$

$$\cdot \frac{1}{(1 - \overline{a_0} \frac{(z - a_0)}{(a_0 z - 1)})^2}$$

$$= \frac{1}{(1 - \overline{a_0} z + a_0 z - |a_0|^2)^2}$$

因此, $C_\varphi C_\varphi f = (1 - |a_0|)^{-2} f$ 即 $(C_\varphi)^2 = (1 - |a_0|)^{-2} I_0$

通过计算, 我们看到若 $c = 1 - |a_0|^2$ 或 $c = -(1 - |a_0|^2)$, 则 $(C_\varphi)^2 = I$ 此时 C_φ 是酉算子, 对于酉加权复合算子 C_φ 我们具有如下定理。

定理 1 设 $|a_0| < 1, a_0 \neq 0, \phi(z) = (1 - |a_0|^2)/(1 - \overline{a_0} z)^2, \varphi(z) = (z - a_0)/(1 - \overline{a_0} z)$, 则 $C_\varphi: L_a^2 \rightarrow L_a^2$ 是酉加权复合算子, 并且具有谱 $\{1, -1\}$ 。

而且进一步, 如果 b 是 φ 的不动点, 则 Bergman 空间 L_a^2 的其中一个正交基为

$$\{e_i; e_i = ((1 - |b|^2)(1 - \overline{b}z)^{-2})$$

$$\cdot ((z - b)(\overline{b}z - 1)^{-1})^i, i = 0, 1, 2, \dots\}$$

并且 $e_i, i = 0, 2, 4, \dots$ 为 C_φ 的特征值为 1 的特征向量, $e_i, i = 1, 3, 5, \dots$ 为 C_φ 的特征值为 -1 的特征向量; 对应特征值为 1 的 C_φ 的特征子空间 $V_1 = \overline{\{e_i; i = 0, 2, 4, \dots\}}$, 对应特征值为 -1 的 C_φ 的特征子空间 $V_{-1} = \overline{\{e_i; i = 1, 3, 5, \dots\}}$ 。

证明 由前面的分析, 对于定理 1 我们只需要证明后面的部分即可。

由于 $((z - b)(\overline{b}z - 1)^{-1})^i$ 是有限 Blaschke 积, $(1 - |b|^2)(1 - \overline{b}z)^{-2}$ 是 Bergman 空间 L_a^2 的标准再生核函数, 由文献 [7] 知

$$\left\{ \begin{aligned} e_i; e_i &= ((1 - |b|^2)(1 - \overline{b}z)^{-2}) \\ &\cdot ((z - b)(\overline{b}z - 1)^{-1})^i, i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\}$$

为 L_a^2 中的正交集, 又因为 L_a^2 为可分空间, 因此可列正交集

$$\left\{ \begin{aligned} e_i; e_i &= ((1 - |b|^2)(1 - \overline{b}z)^{-2}) \\ &\cdot ((z - b)(\overline{b}z - 1)^{-1})^i, i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\}$$

是 L_a^2 的一个正交基。

为了方便, 我们记 $B(z) = (z - b)(\overline{b}z - 1)^{-1}$, 则

$$(C_{\varphi \circ \phi} e_i)(z) = \frac{1 - |a_0|^2}{(1 - \overline{a_0} z)^2}$$

$$\cdot \left[\frac{1 - |b|^2}{1 - \overline{b} \frac{z - a_0}{a_0 z - 1}} \right]^2 B(\varphi(z))^i$$

$$= \frac{(1 - |a_0|^2)(1 - |b|^2)}{(1 - \overline{a_0} z + \overline{b} z - \overline{b} a_0)^2} (-1)^i B(z)^i$$

$$= (-1)^i \frac{(1 - |a_0|^2)(1 - |b|^2)}{[1 - \overline{b} a_0 + (\overline{b} - \overline{a_0}) z]^2} B(z)^i$$

$$= (-1)^i \frac{1 - |a_0|^2}{(1 - \overline{a_0} b)^2} \left[\frac{(1 - |b|^2)}{1 - \frac{b - a_0}{a_0 b - 1} z} \right]^2 B(z)^i$$

$$= (-1)^i \overline{\phi(b)} \frac{(1 - |b|^2)}{(1 - \overline{\varphi(b)} z)^2} B(z)^i$$

$$= (-1)^i \overline{\phi(b)} \frac{(1 - |b|^2)}{(1 - \overline{b} z)^2} B(z)^i$$

$$= (-1)^i \overline{\phi(b)} e_i(z)$$

因为 $\phi(z) = \frac{(1 - |a_0|^2)}{(1 - \overline{a_0} z)^2}$, b 是 φ 的不动点, 通过简单计算可得 $b = (1 - \sqrt{1 - |a_0|^2})/\overline{a_0}$ 所以 $\phi(b) = (1 - |a_0|^2)/(1 - \overline{a_0} b)^2 = 1$ 证毕。

注 若取 $\phi(z) = -(1 - |a_0|^2)/(1 - \overline{a_0} z)^2$, 则有类似的定理成立。

2 紧自伴加权复合算子

我们考虑了 $|a_0| < 1, a_1 = |a_0|^2 - 1$ 的情形, 这时当加权复合算子为自伴算子时^[8-9], 同时必为酉算子。现在考虑对于 $|a_0| < 1, |a_0|^2 - 1 < a_1 < 1 - |a_0|^2$ 的情形。

定理 2 设 $|a_0| < 1, a_0 \neq 0, |a_0|^2 - 1 < a_1 < 1 - |a_0|^2$, 则自伴加权复合算子 $C_{\varphi \circ \phi}: L_a^2 \rightarrow L_a^2$ 是紧的, 并且 $C_{\varphi \circ \phi}$ 的特征向量为

$$e_i = (1 - |b|^2)(1 - \overline{b}z)^{-2}$$

$$\cdot ((z - b)(\overline{b}z - 1)^{-1})^i, i = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

$C_{\varphi \circ \phi}$ 的谱为

$$\sigma(C_{\varphi \circ \phi}) = \{0\} \cup \{\phi(b), \phi(b)$$

$$\cdot \varphi'(b), \dots, \phi(b)(\varphi'(b))^j, \dots\} \quad (2)$$

其中 (1) 式、(2) 式中的 b 是 φ 在 D 内的不动点。

证明 由于当 $|a_0|^2 - 1 < a_1 < 1 - |a_0|^2$ 时, 复合算子 $C_{\varphi \circ \phi}$ 是紧的, 乘法算子 M_ϕ 是有界的, 而 $C_{\varphi \circ \phi} = M_\phi C_\varphi$, 因此 $C_{\varphi \circ \phi}$ 是紧的。由于 C_φ 是紧的, 由文献 [7] 可知 φ 在单位圆盘 D 内有不动点 b , 计算 $C_{\varphi \circ \phi} e_i$:

由于

$$C_{\varphi \circ \phi} e_i = C_{\varphi \circ \phi} e_0 B^i = (C_{\varphi \circ \phi} e_0) C_{\varphi \circ \phi} B^i$$

$$= \overline{\phi(b)} e_0 (B \circ \varphi)^i = \overline{\phi(b)} \varphi'(b)^i e_i$$

实际上, 可以具体求出 $\overline{\phi(b)}$ 的值。由于 b 是 φ 的不动点, 即 $\varphi(b) = b$ 因此

$$\varphi(b) = a_0 + \frac{a_1 b}{(1 - \overline{a_0} b)} = b$$

所以

$$\bar{a}_0 b^2 - (|a_0|^2 - a_1 - 1)b + a_0 = 0$$

解得

$$b = \frac{1 + |a_0|^2 - a_1 - \sqrt{(1 + |a_0|^2 - a_1)^2 - 4|a_0|^2}}{2\bar{a}_0}$$

将 b 的值带入 ϕ 得

$$\phi(b) = \left[\frac{c}{1 - \frac{(1 + |a_0|^2 - a_1 - d)}{2}} \right]^2$$

其中 $d = \sqrt{(1 + |a_0|^2 - a_1)^2 - 4|a_0|^2}$, 由于 c 是实数, 因此 $\overline{\phi(b)} = \phi(b)$. 证毕。

参考文献:

- [1] Forelli F. The isometries of H^p [J]. Canadian J Math 1964, 16: 721-728
- [2] Cowen C C. An analytic Toeplitz operator that commutes with a compact operator and related class of Toeplitz operators [J]. J Funct Anal, 1980, 26: 169-184

- [3] Contreras M D, Hernandez-Diaz A G. Weighted composition operators on Hardy spaces [J]. J Math Anal Appl, 2001, 262: 224-222
- [4] Choa J S, Ohno S. Product of composition and analytic Toeplitz operators [J]. J Math Anal Appl, 2002, 281: 220-221
- [5] 江治杰, 柏宏斌. 加权 Bergman 空间之间复合算子列的总体紧性 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(1): 13-15
- [6] 柏宏斌, 江治杰. Bergman 空间上的加权复合算子 [J]. 四川大学学报, 2008, 45(4): 715-718
- [7] Hedermalm H, Korenblum B. Theory of Bergman Spaces [M]. New York: Springer-Verlag, 2000
- [8] Cowen C C, Maccher B D. Composition operators on Bergman Spaces of Analytic Functions [M]. CRC Press: CRC Ratio, 1995
- [9] 江治杰. 加权 Bergman 空间 $A_{\alpha}^{-2}(\Omega)$ 上的加权复合算子 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2007, 20(6): 13-15

Weighted Composition Operator on Bergman Space

WANG Han-qing¹, ZENG Guang-ju², ZHOU Feng², BAI Hong-bin²

(1 Administration Office, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

(2 School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract The weighted composition operator compactness on the Bergman space is characterized in the paper. Firstly, the spectrum, eigenvalues and eigenspaces of unitary weighted composition operator are computed. Secondly, the eigenvector and compute spectrum of compact self-adjoint weighted composition operator on Bergman space are discussed.

Key words weighted composition operator; unitary operator; eigenvalue; eigenspace; spectrum

(上接第 24 页)

- [6] Khanh P Q, Nuong T H, Thera M. On duality in nonconvex vector optimization in Banach space using augmented lagrangians [J]. Positivity, 1999, 3: 49-64
- [7] Flores-Bazan F. Semistrictly quasiconvex mapping and nonconvex vector optimization [J]. Math Methods Oper Research, 2004, 59: 129-145.

Characterization of Solution Sets of Quasiconvex Vector Optimization Problems in Real Reflexive Banach Spaces

L I Liu-fen

(School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract This paper, which uses the 0-coercivity of some nonconvex functions to characterize the nonemptiness and compactness of solution sets of the vector optimization problems, discusses the characterization of the nonemptiness and compactness of weakly efficient solution sets of nonconvex vector optimization problems in finite-dimensional spaces.

Key words Nonconvex vector optimization; weakly efficient solution; 0-coercivity; compactness