

具有某种特性的向量优化问题的解的刻画

李柳芬

(四川理工学院理学院, 四川 自贡 643000)

摘要: 在有限维空间中, 当目标函数凸下半连续时, 向量优化问题一定存在弱有效解, 并且解集是紧的, 但当目标函数非凸时, 这不一定成立, 文章讨论了把目标函数的凸性减弱之后, 向量优化问题的解集是非空并且紧的, 另外还得到一些等价的刻画。

关键词: 凸向量优化; 弱有效解; 紧性; 0-强制性

中图分类号: O 177 2

文献标识码: A

1 预备知识

Flores-Bazan 和 Vera^[1] 在有限维空间中给出了非凸向量优化问题解集的非空性和紧性的一些刻画, 本文在文献^[1]的基础上又增加了一些刻画。S Deng^[2] 在有限维空间中研究了凸向量优化问题的解集的非空性和有界性, 后来使用文献^[3]中的一些性质将该刻画推广到无穷维空间中^[4], 而且对目标函数作了某些限制, 从文献^[2-5]研究的都是目标函数凸的情形, 本文把文献^[4]中的假设减弱, 借用文献^[6-7]关于非凸向量优化的某些方法, 得到对于具有某种特性的向量优化问题解集的一些刻画。

假设 (A_0) , 设 $E \subseteq R^n (n > 1)$ 为非空、闭、凸集, $C \subseteq R^m (m > 1)$ 为闭、凸锥, 并且 C 的拓扑内部 $\text{int} C \neq \Phi$, $f: E \rightarrow R_\infty^m$ 为向量值函数, $f = (f_1, \dots, f_m)$ 下半连续并且满足: $\forall x_1, x_2 \in E, \lambda \in (0, 1)$ 有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) + \lambda(1-\lambda)\|x_1 + x_2\|^y, \forall y > 0 \quad (1)$$

考虑优化问题 (P) : 找 $x_0 \in E$ 使得 $f(x_0) - f(y) \notin \text{int} C, \forall y \in E$, 向量 $x_0 \in E$ 是问题 (P) 的弱有效解或弱 Pareto 解 $\Leftrightarrow f(x_0) - f(y) \notin \text{int} C, \forall y \in E$. 问题 (P) 的解集记为 E_w . 我们首先需要下面的概念。

定义 1 设 $f: E \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ 为广义实值函数。

(1) 称 f 在 $x_0 \in X$ 是下半连续的, 若 $\forall \{x_n\} \subseteq E$ 且 $x_n \rightarrow x_0 (k \rightarrow +\infty)$ 有 $\liminf_{n \rightarrow +\infty} h(x_n) \geq h(x_0)$.

(2) 称 h 是 0-强制的, 若 $\forall \{x_n\} \subseteq E$, 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n) = +\infty$.

2 主要结果

首先构造一个集合, $\forall e \in E$, 设 $N(e) = \{x \in E: f_i(x) \leq f_i(e), \forall i = 1, \dots, m\}$. 该集合在后面的证明中起着非常重要的作用。

定理 1 在假设 (A_0) 下考虑问题 (P) , 若 E_w 非空, 则 $\forall e \in E, N(e)$ 非空、紧。

证明 显然 $e \in N(e)$, 所以 $N(e)$ 非空。对 $\forall x_n \in N(e)$, 设 $x_n \rightarrow x_0$, 则 $f_i(x_n) \leq f_i(e)$, 因为 $\forall i = 1, \dots, m, f_i$ 下半连续, 故 $f_i(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_i(x_n) \leq f_i(e)$, 所以 $x_0 \in N(e)$, 从而 $N(e)$ 闭。倘若 $N(e)$ 无界, 则 $\exists \{x_n\} \subseteq N(e)$ 且 $\|x_n\| \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$, 从而 $\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}$ 有界, 则

$\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}$ 存在收敛的子列, 不妨设 $\frac{x_n}{\|x_n\|} \rightarrow d$, 则 $\|d\| = 1$.

因为 E_w 非空, 取 $x_0 \in E_w$, 由 f 的性质知道, $\forall \lambda > 0$ 有

$$\begin{aligned} f_i \left(\frac{\lambda}{\|x_n\|} x_n + \left(1 - \frac{\lambda}{\|x_n\|} \right) x_0 \right) &\leq \frac{\lambda}{\|x_n\|} f_i(x_n) + \\ &\left(1 - \frac{\lambda}{\|x_n\|} \right) f_i(x_0) + \frac{\lambda}{\|x_n\|} \left(1 - \frac{\lambda}{\|x_n\|} \right) \|x_n - x_0\|^y \\ &\leq \frac{\lambda}{\|x_n\|} f_i(e) + \left(1 - \frac{\lambda}{\|x_n\|} \right) f_i(x_0) + \\ &\frac{\lambda(\|x_n\| + \|x_0\|)^y}{\|x_n\|} - \frac{\lambda^2(\|x_n\| + \|x_0\|)^y}{\|x_n\|^2} \end{aligned}$$

由 f_i 的下半连续性知, 当 n 充分大且 $0 < \gamma < 0$ 时, 有 $f_i(\lambda d + x_0) \leq f_i(x_0)$, 因为 $d \neq 0$, 则 $\lambda d + x_0 \neq x_0$, 这与 $x_0 \in E_w$ 矛盾。所以 $N(e)$ 有界, 从而紧。

定理 2 在假设 (A_0) 下考虑问题 (P) , 则 E_w 非空、紧 $\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, m, \operatorname{argm}_{E_w} \inf_i$ 非空、紧。

证明 " \Rightarrow ": 倘若对某个 $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ 有 $\operatorname{argm}_{E_w} \inf_{i_0} = \emptyset$, 取 $x_0 \in \operatorname{argm}_{E_w} \inf_{i_0}(x)$ 及 $x_1 \in E$ 使得 $f_{i_0}(x_1) < f_{i_0}(x_0)$, 由定理 1 知 $N(x_1) = \{x \in E: f_i(x) \leq f_i(x_1), i = 1, \dots, m\}$ 非空、紧。因为 f_i 在 E 上下半连续, 故 f_i 在 $N(x_1)$ 上一定有极小值, 即 $\exists x_2 \in N(x_1)$, 使得 $f_i(x_2) \leq f_i(x), \forall x \in N(x_1)$ 。显然 $x_2 \in E_w$, 故 $f_{i_0}(x_2) \leq f_{i_0}(x_1) < f_{i_0}(x_0)$, 这与 $x_0 \in \operatorname{argm}_{E_w} \inf_{i_0}$ 矛盾, 故 $\forall i = 1, \dots, m, \operatorname{argm}_{E_w} \inf_i$ 非空。

另外, 由 $\operatorname{argm}_{E_w} \inf_i \subseteq E_w$ 知其有上界, 由 f_i 的下半连续性知, $\operatorname{argm}_{E_w} \inf_i$ 闭, 从而 $\operatorname{argm}_{E_w} \inf_i$ 紧。" \Leftarrow ": 因为 $\operatorname{argm}_{E_w} \inf_i \subseteq E_w$, 并且 $\operatorname{argm}_{E_w} \inf_i$ 非空, 所以 E_w 非空。设 $x_n \in E_w$ 且 $x_n \rightarrow x_0$, 则 $f_i(x_n) \leq f_i(x), \forall x \in E, i = 1, \dots, m$ 。由 f_i 的下半连续性知, $f_i(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_i(x_n) \leq f_i(x)$, 即 $x_0 \in E_w$, 从而 E_w 闭。

下面证明 E_w 有界, 倘若 E_w 无界, 则 $\exists \{x_n\} \subseteq E_w$ 且 $\|x_n\| \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty)$, 从而 $\left\{ \begin{matrix} x_n \\ x_n \end{matrix} \right\}$ 有界, 则 $\left\{ \begin{matrix} x_n \\ x_n \end{matrix} \right\}$ 存在收敛的子列, 不妨设 $\frac{x_n}{\|x_n\|} \rightarrow d$, 则 $d = 1$ 。因为 $\operatorname{argm}_{E_w} \inf_i$ 非空, 取 $x_0 \in \operatorname{argm}_{E_w} \inf_i$, 则 $f_i(x_0) \leq f_i(x), \forall x \in E, i = 1, \dots, m$, 由 f 的性质知道, $\forall \lambda > 0$ 有

$$\begin{aligned} f_i \left[\frac{\lambda}{\|x_n\|} x_n + \left(1 - \frac{\lambda}{\|x_n\|} \right) x_0 \right] &\leq \frac{\lambda}{\|x_n\|} f_i(x_n) + \\ &\left(1 - \frac{\lambda}{\|x_n\|} \right) f_i(x_0) + \frac{\lambda}{\|x_n\|} \left(1 - \frac{\lambda}{\|x_n\|} \right) \|x_n - x_0\|^\gamma \\ &\leq \frac{\lambda}{\|x_n\|} f_i(e) + \left(1 - \frac{\lambda}{\|x_n\|} \right) f_i(x_0) + \\ &\frac{\lambda (\|x_n\| + \|x_0\|)^\gamma}{\|x_n\|} - \frac{\lambda^2 (\|x_n\| + \|x_0\|)^\gamma}{\|x_n\|^2} \end{aligned}$$

由 f_i 的下半连续性知, 当 n 充分大且 $0 < \gamma < 0$ 时, 有 $f_i(\lambda d + x_0) \leq f_i(x_0)$, 因为 $d \neq 0$, 则 $\lambda d + x_0 \neq x_0$, 这与 $x_0 \in \operatorname{argm}_{E_w} \inf_i$ 矛盾。所以 E_w 有界, 从而紧。

定理 3 在假设 (A_0) 下考虑问题 (P) , 则 E_w 非空、紧 $\Leftrightarrow \liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 。

证明 " \Rightarrow ": 倘若 $\exists x_n \in E$ 及 $M > 0$ 及某个 $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ 使得 $\|x_n\| \rightarrow +\infty$ 时, $f_{i_0}(x_n) \leq M$, 则 $\left\{ \begin{matrix} x_n \\ \|x_n\| \end{matrix} \right\}$

有界, 从而 $\left\{ \begin{matrix} x_n \\ \|x_n\| \end{matrix} \right\}$ 存在收敛的子列, 不妨设 $\frac{x_n}{\|x_n\|} \rightarrow d$,

则 $\|d\| = 1$ 。因为 E_w 非空, 任取 $x_0 \in E_w$, 由 f 的性质知, $\forall \lambda > 0$ 有

$$\begin{aligned} f_{i_0} \left[\frac{\lambda}{\|x_n\|} x_n + \left(1 - \frac{\lambda}{\|x_n\|} \right) x_0 \right] &\leq \frac{\lambda}{\|x_n\|} f_{i_0}(x_n) + \\ &\left(1 - \frac{\lambda}{\|x_n\|} \right) f_{i_0}(x_0) + \frac{\lambda}{\|x_n\|} \left(1 - \frac{\lambda}{\|x_n\|} \right) \|x_n - x_0\|^\gamma \\ &\leq \frac{\lambda}{\|x_n\|} M + \left(1 - \frac{\lambda}{\|x_n\|} \right) f_{i_0}(x_0) + \frac{\lambda (\|x_n\| + \|x_0\|)^\gamma}{\|x_n\|} - \\ &\frac{\lambda^2 (\|x_n\| + \|x_0\|)^\gamma}{\|x_n\|^2} \end{aligned}$$

由 f_{i_0} 的下半连续性知, 当 n 充分大且 $0 < \gamma < 0$ 时, 有 $f_{i_0}(\lambda d + x_0) \leq f_{i_0}(x_0)$, 因为 $d \neq 0$, 则 $\lambda d + x_0 \neq x_0$, 这与 $x_0 \in E_w$ 矛盾。

所以 $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 。

" \Leftarrow ": 对于给定的 $x_1 \in E$, 由 $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 知道, $\exists r > 0$ 使得当 $\|x\| > r$ 时, $f_i(x) > f_i(x_1), \forall i = 1, \dots, m$, 令 $B_r = \{x \in E: \|x\| \leq r\}$, 则 B_r 紧, 从而 f_i 在 B_r 上一定有极小值, 即 $\exists x_2 \in B_r$ 使得 $f_i(x_2) \leq f_i(x), \forall x \in B_r$, 令 $x_0 = \operatorname{argm}_{E_w} \inf \{f_i(x_1), f_i(x_2)\}$, 则 $f_i(x_0) \leq f_i(x), \forall x \in E, i = 1, \dots, m$, 故 $x_0 \in E_w$, 即 E_w 非空。设 $y_n \in E_w$ 且 $y_n \rightarrow y_0$, 则 $f_i(y_n) \leq f_i(y), \forall y \in E, i = 1, \dots, m$, 由 f_i 的下半连续性知, $f_i(y_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_i(y_n) \leq f_i(y), \forall y \in E$ 故 $y_0 \in E_w$, 即 E_w 闭。

下面证明 E_w 有界。

倘若 E_w 无界, 则 $\exists z_n \in E_w$ 且 $\|z_n\| \rightarrow +\infty$, 从而 $\lim_{\|z\| \rightarrow +\infty} f(z) = +\infty$ 这与 $z_n \in E_w$ 矛盾, 故 E_w 有界, 从而紧。

参考文献:

- [1] Flies-Bazan F, Vera C. Characterization of the nonemptiness and compactness of solution sets in convex and nonconvex vector optimization [J]. J Optim. Theory Appl 2006, 130(2): 185-207.
- [2] Deng S. Characterization of the nonemptiness and boundedness of weakly efficient solution sets of convex vector optimization problems in real reflexive Banach spaces [J]. J Optim. Theory Appl 2009, 140: 1-7.
- [3] Mangasarian O L. A simple characterization of solution set of convex programs [J]. Oper Res Lett 1988, 7: 21-26.
- [4] Rockafellar R T. Convex analysis [M]. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1970.
- [5] Deng S. Characterizations of the nonemptiness and compactness of solution sets in Convex Vector Optimization [J]. J Optim. Theory Appl 1998, 96(1): 123-131.

(下转第 30 页)

所以

$$\bar{a}_0 b^2 - (|a_0|^2 - a_1 - 1)b + a_0 = 0$$

解得

$$b = \frac{1 + |a_0|^2 - a_1 - \sqrt{(1 + |a_0|^2 - a_1)^2 - 4|a_0|^2}}{2\bar{a}_0}$$

将 b 的值带入 ϕ 得

$$\phi(b) = \left[\frac{c}{1 - \frac{(1 + |a_0|^2 - a_1 - d)}{2}} \right]^2$$

其中 $d = \sqrt{(1 + |a_0|^2 - a_1)^2 - 4|a_0|^2}$, 由于 c 是实数, 因此 $\overline{\phi(b)} = \phi(b)$. 证毕。

参考文献:

- [1] Foerelli F. The isometries of H^p [J]. Canadian J Math 1964, 16: 721-728
- [2] Cowen C C. An analytic Toeplitz operator that commutes with a compact operator and related class of Toeplitz operators [J]. J Funct Anal, 1980, 26: 169-184

- [3] Contreras M D, Hernandez-Diaz A G. Weighted composition operators on Hardy spaces [J]. J Math Anal Appl, 2001, 262: 224-222
- [4] Choa J S, Ohno S. Product of composition and analytic Toeplitz operators [J]. J Math Anal Appl, 2002, 281: 220-221
- [5] 江治杰, 柏宏斌. 加权 Bergman 空间之间复合算子列的总体紧性 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(1): 13-15
- [6] 柏宏斌, 江治杰. Bergman 空间上的加权复合算子 [J]. 四川大学学报, 2008, 45(4): 715-718
- [7] Hedermahn H, Korenblum B. Theory of Bergman Spaces [M]. New York: Springer-Verlag, 2000
- [8] Cowen C C, Maccher B D. Composition operators on Bergman Spaces of Analytic Functions [M]. CRC Press: CRC Ratio, 1995
- [9] 江治杰. 加权 Bergman 空间 $A_{-2}(\Omega)$ 上的加权复合算子 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2007, 20(6): 13-15

Weighted Composition Operator on Bergman Space

WANG Han-qing¹, ZENG Guang-ju², ZHOU Feng², BAI Hong-bin²

(1 Administration Office, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

(2 School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract The weighted composition operator compactness on the Bergman space is characterized in the paper. Firstly, the spectrum, eigenvalues and eigenspaces of unitary weighted composition operator are computed. Secondly, the eigenvector and compute spectrum of compact self-adjoint weighted composition operator on Bergman space are discussed.

Key words weighted composition operator; unitary operator; eigenvalue; eigenspace; spectrum

(上接第 24 页)

- [6] Khanh P Q, Nuong T H, Thera M. On duality in nonconvex vector optimization in Banach space using augmented lagrangians [J]. Positivity, 1999, 3: 49-64
- [7] Flores-Bazan F. Semistrictly quasiconvex mapping and nonconvex vector optimization [J]. Math Methods Oper Research, 2004, 59: 129-145.

Characterization of Solution Sets of Quasiconvex Vector Optimization Problems in Real Reflexive Banach Spaces

L I Liu-fen

(School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract This paper, which uses the 0-coercivity of some nonconvex functions to characterize the nonemptiness and compactness of solution sets of the vector optimization problems, discusses the characterization of the nonemptiness and compactness of weakly efficient solution sets of nonconvex vector optimization problems in finite-dimensional spaces.

Key words Nonconvex vector optimization; weakly efficient solution; 0-coercivity; compactness