

# 一类矩阵微分方程的特解

吴幼明, 何佩婷

(佛山科学技术学院数学系, 广东 佛山 528000)

**摘要:** 基于微分方程组理论和矩阵理论, 采用待定矩阵方法和按列比较方法, 给出了非齐次项为二次多项式与指数函数乘积的一类三维二阶常系数线性微分方程组的特解公式, 对二种特殊情况进行了讨论, 并通过算例验证了微分方程组特解公式的正确性。为高阶微分方程组的解法研究提供了一条有效的途径。

**关键词:** 常系数; 微分方程组; 待定矩阵法; 特解

**中图分类号:** O 241. 8

**文献标识码:** A

## 引言

求常系数线性微分方程组的特解<sup>[1-6]</sup>是微分方程理论的重要内容之一, 而对于高阶微分方程组的特解研究, 目前研究结果还很少。根据线性非齐次微分方程组解的结构定理, 线性非齐次微分方程组的通解等于对应的齐次方程组的通解加上非齐次微分方程组的一个特解。对于常系数线性微分方程组来说, 当非齐次项为某些特殊形式时, 可用待定矩阵法<sup>[3-6]</sup>求出非齐次方程组的一个特解。文献[7]给出了一类不含一阶导数项的三维二阶常系数微分方程组的通解公式, 但其非齐次项仅为二次多项式的情形; 文献[3-5]分别给出了文献[7]的微分方程组在非齐次项为二次多项式与指数函数相乘、三角函数与指数函数相乘和二次多项式与三角函数相乘的形式时的通解公式。文献[8]在文献[7]的基础上得到了一类含一阶导数项的三维二阶常系数微分方程组的通解公式, 但其非齐次项亦仅为二次多项式的情形。

本文在文献[3-8]的基础上, 采用待定矩阵法, 给出了文献[8]的微分方程组在非齐次项为二次多项式与指数函数相乘的形式时的通解公式, 这是文献[3-8]的推广, 亦是文献[6]的补充, 因此更具有一般性。

## 1 符号

给出矩阵微分方程

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_1 \\ f''_2 \\ f''_3 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1(x) \\ t_2(x) \\ t_3(x) \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中  $f_i = f_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$  是关于  $x$  的函数,  $t_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$  是关于  $x$  的二次多项式与指数函数的乘积,  $a, a_{ij}, b_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) 是常数。

记  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ , 并假设  $A$  可逆,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}, C = A^{-1}B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

因此, 式(1)整理后为

$$\begin{bmatrix} f''_1 \\ f''_2 \\ f''_3 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \end{bmatrix} - C \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} t_1(x) \\ t_2(x) \\ t_3(x) \end{bmatrix} \quad (2)$$

## 2 方程的通解

### 2.1 齐次方程的通解<sup>[8]</sup>

方程 (2)对应的齐次方程为:

$$\begin{bmatrix} f''_1 \\ f''_2 \\ f''_3 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \end{bmatrix} - C \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

则方程 (3)的通解为:

$$f = [f_1 \ f_2 \ f_3]^T = V[\exp(\Lambda x)C'_1 + \exp((aE_3 - \Lambda)x)C'_2]$$

其中,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  而  $\lambda_1 = \frac{1}{2}[a + \sqrt{a^2 + 4\bar{\lambda}_1}]$ ,

$\lambda_2 = \frac{1}{2}[a + \sqrt{a^2 + 4\bar{\lambda}_2}]$ ,  $\lambda_3 = \frac{1}{2}[a + \sqrt{a^2 + 4\bar{\lambda}_3}]$ ,

而  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$ 是矩阵  $C$ 的三个特征根;  $V$ 是矩阵  $C$ 的列特征向量的矩阵;  $C'_1, C'_2$ 是常数向量。

### 2.2 非齐次方程的特解

对方程 (2)设

$$t(x) = \begin{bmatrix} t_1(x) \\ t_2(x) \\ t_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_1x^2 + m_1x + n_1)e^{rx} \\ (l_2x^2 + m_2x + n_2)e^{rx} \\ (l_3x^2 + m_3x + n_3)e^{rx} \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中  $l_i, m_i, n_i, r_i (i = 1, 2, 3)$ 是常数。根据待定矩阵法, 可设方程 (2)的一个特解为:

$$f_i = (Gx^2 + Hx + J) \begin{bmatrix} e^{rx} \\ e^{rx} \\ e^{rx} \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix}$$

而  $g_{ik}, h_{ik}, j_{ik} (i, k = 1, 2, 3)$ 是常数。

将式 (5)代入方程 (2), 整理并比较  $x$ 的同次幂系数和指数函数的系数, 得到下列 3个等式:

$$G \begin{bmatrix} r_1^2 e^{rx} \\ r_2^2 e^{rx} \\ r_3^2 e^{rx} \end{bmatrix} - aG \begin{bmatrix} r_1 e^{rx} \\ r_2 e^{rx} \\ r_3 e^{rx} \end{bmatrix} - CG \begin{bmatrix} e^{rx} \\ e^{rx} \\ e^{rx} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} l_1 e^{rx} \\ l_2 e^{rx} \\ l_3 e^{rx} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$4G \begin{bmatrix} r_1 e^{rx} \\ r_2 e^{rx} \\ r_3 e^{rx} \end{bmatrix} + H \begin{bmatrix} r_1^2 e^{rx} \\ r_2^2 e^{rx} \\ r_3^2 e^{rx} \end{bmatrix} - 2aG \begin{bmatrix} e^{rx} \\ e^{rx} \\ e^{rx} \end{bmatrix} - dH \begin{bmatrix} r_1 e^{rx} \\ r_2 e^{rx} \\ r_3 e^{rx} \end{bmatrix}$$

$$- CH \begin{bmatrix} e^{rx} \\ e^{rx} \\ e^{rx} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} m_1 e^{rx} \\ m_2 e^{rx} \\ m_3 e^{rx} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$2G \begin{bmatrix} e^{rx} \\ e^{rx} \\ e^{rx} \end{bmatrix} + H \begin{bmatrix} r_1 e^{rx} \\ r_2 e^{rx} \\ r_3 e^{rx} \end{bmatrix} + J \begin{bmatrix} r_1^2 e^{rx} \\ r_2^2 e^{rx} \\ r_3^2 e^{rx} \end{bmatrix} - dH \begin{bmatrix} e^{rx} \\ e^{rx} \\ e^{rx} \end{bmatrix} - aJ \begin{bmatrix} r_1 e^{rx} \\ r_2 e^{rx} \\ r_3 e^{rx} \end{bmatrix} - CJ \begin{bmatrix} e^{rx} \\ e^{rx} \\ e^{rx} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} n_1 e^{rx} \\ n_2 e^{rx} \\ n_3 e^{rx} \end{bmatrix} \quad (8)$$

由式 (6)取第一列得:

$$\begin{bmatrix} g_{1i} \\ g_{2i} \\ g_{3i} \end{bmatrix} = S_i \begin{bmatrix} l_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (9)$$

$$\text{故 } G = [(S_1)_1 (S_2)_2 (S_3)_3] \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix}$$

由式 (7)取第一列得:

$$\begin{bmatrix} h_{1i} \\ h_{2i} \\ h_{3i} \end{bmatrix} = S_i \begin{bmatrix} m_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2(2r_i - a)R_i \begin{bmatrix} g_{1i} \\ g_{2i} \\ g_{3i} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$$

将式 (9)代入式 (10)有

$$H = [(S_1)_1 (S_2)_2 (S_3)_3] \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix} - 2[(\Phi_1)_1 (\Phi_2)_2 (\Phi_3)_3] \times \begin{bmatrix} l_1(2r_1 - a) & 0 & 0 \\ 0 & l_2(2r_2 - a) & 0 \\ 0 & 0 & l_3(2r_3 - a) \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中

$$S_i = RA^{-1} = [(r_i^2 - ar_i)A - B]^{-1}$$

$$\Phi_i = R_i S_i = R_i^2 A^{-1}$$

$$R_i = [(r_i^2 - ar_i)E_3 - C]^{-1} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$E_3$ 为三阶单位矩阵。  $(S_i)_i, (\Phi_i)_i$ 分别为  $S_i, \Phi_i$ 的第  $i$ 列  $(i = 1, 2, 3)$ 。

由式 (8)取第一列得:

$$\begin{bmatrix} j_{1i} \\ j_{2i} \\ j_{3i} \end{bmatrix} = R_i A^{-1} \begin{bmatrix} n_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2R_i \begin{bmatrix} g_{1i} \\ g_{2i} \\ g_{3i} \end{bmatrix} - (2r_i - a)R_i \begin{bmatrix} h_{1i} \\ h_{2i} \\ h_{3i} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (12)$$

将式(9)和式(10)代入式(12)得到

$$J = [(S_1)_1 (S_2)_2 (S_3)_3] \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix} \\ - I(\Phi_1)_1 (\Phi_2)_2 (\Phi_3)_3 \\ \times \begin{bmatrix} 2l_1 + m_1(2r_1 - a) & 0 & 0 \\ 0 & 2l_2 + m_2(2r_2 - a) & 0 \\ 0 & 0 & 2l_3 + m_3(2r_3 - a) \end{bmatrix} \\ + 2I(U_1)_1 (U_2)_2 (U_3)_3 \\ \times \begin{bmatrix} l_1(2r_1 - a)^2 & 0 & 0 \\ 0 & l_2(2r_2 - a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3(2r_3 - a)^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中  $U_i = R_i \Phi_i = R_i^3 A^{-1}$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $(U_i)_i$  分别为  $U_i$  的第  $i$  列 ( $i = 1, 2, 3$ )。

故方程(2)的一个特解为:

$$f_i = [(S_1)_1 (S_2)_2 (S_3)_3] \begin{bmatrix} (l_1 x^2 + m_1 x + n_1) e^{rx} \\ (l_2 x^2 + m_2 x + n_2) e^{rx} \\ (l_3 x^2 + m_3 x + n_3) e^{rx} \end{bmatrix} \\ - I(\Phi_1)_1 (\Phi_2)_2 (\Phi_3)_3 \\ \times \begin{bmatrix} (2l_1(2r_1 - a)x + 2l_1 + m_1(2r_1 - a)) e^{rx} \\ (2l_2(2r_2 - a)x + 2l_2 + m_2(2r_2 - a)) e^{rx} \\ (2l_3(2r_3 - a)x + 2l_3 + m_3(2r_3 - a)) e^{rx} \end{bmatrix} \\ + 2I(U_1)_1 (U_2)_2 (U_3)_3 \begin{bmatrix} l_1(2r_1 - a)^2 e^{rx} \\ l_2(2r_2 - a)^2 e^{rx} \\ l_3(2r_3 - a)^2 e^{rx} \end{bmatrix} \quad (14)$$

从而方程(2)的通解为:

$$f = V[\exp(\Lambda x)C'_1 + \exp((aE_3 - \Lambda)x)C'_2] + f_i \quad (15)$$

### 2.3 特殊情况的讨论

(1)当  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$  时, 式(14)变为:

$$f_i = -B^{-1}t(x) + aB^{-1}AB^{-1}t'(x) \\ - B^{-1}AB^{-1}(E_3 + a^2AB^{-1})t''(x) \quad (16)$$

此结果与文献[8]的结论完全一致, 证明本文的通解公式是文献[8]的推广。

(2)当  $a = 0$  时, 式(14)变为:

$$f_i = [(S_1)_1 (S_2)_2 (S_3)_3] t(x) \\ + 8I(U_1)_1 (U_2)_2 (U_3)_3 \begin{bmatrix} l_1 r_1^2 e^{rx} \\ l_2 r_2^2 e^{rx} \\ l_3 r_3^2 e^{rx} \end{bmatrix} \\ - 2I(\Phi_1)_1 (\Phi_2)_2 (\Phi_3)_3 \\ \times \begin{bmatrix} (r_1(2l_1x + m_1) + l_1) e^{rx} \\ (r_2(2l_2x + m_2) + l_2) e^{rx} \\ (r_3(2l_3x + m_3) + l_3) e^{rx} \end{bmatrix} \quad (17)$$

此结果与文献[3]中的结论完全一致, 证明本文的通解公式亦是文献[3]的推广。

### 3 算例

用本文方法解下列方程组的一个特解

$$\begin{cases} x'' - x' - 2x - y - z = -e^x \\ y'' - y' - x - 2y - z = te^x \\ z'' - z' - x - y - 2z = t^2 e^{-t} \end{cases} \quad (18)$$

解 将方程组(18)写成矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{2x} \\ te^x \\ t^2 e^{-t} \end{bmatrix}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$a = 1, l_1 = m_1 = l_2 = n_2 = m_3 = n_3 = 0, m_2 = r_2 = l_3 = 1, n_1 = r_3 = -1, r_1 = 2$  则

$$R_1 = R_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, S_i = R_i (i = 1, 2, 3)$$

由  $\Phi_i = R_i^2, U_i = R_i^3$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 有

$$\Phi_1 = \Phi_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 11 & -5 \\ -5 & -5 & 11 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = U_3 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = -\frac{1}{64} \begin{bmatrix} 43 & -21 & -21 \\ -21 & 43 & -21 \\ -21 & -21 & 43 \end{bmatrix}$$

方程组 (18) 的一个特解为:

$$f_t = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2e^{2t} \\ -te^t \\ 2t^2e^{-t} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 \\ -1 & 11 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ (-3t+) \end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & -21 & -3 \\ -3 & 43 & -3 \\ -3 & -21 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9e^{-t} \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{4}\left(t + \frac{5}{4}\right)e^t - \frac{1}{2}\left(t^2 + 3t + \frac{25}{2}\right)e^{-t} \\ y(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}\left(3t + \frac{11}{4}\right)e^t - \frac{1}{2}\left(t^2 + 3t + \frac{25}{2}\right)e^{-t} \\ z(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{4}\left(t + \frac{5}{4}\right)e^t + \frac{1}{2}\left(t^2 + 9t + \frac{39}{2}\right)e^{-t} \end{cases} \quad (19)$$

经检验, 式 (19) 确是方程组 (18) 的一个特解。

#### 4 结束语

本文采用待定矩阵法, 在文献 [3-8] 的基础上, 得到文献 [8] 中微分方程组在非齐次项为二次多项式与指数函数相乘的形式时的通解公式, 并通过算例验证了其特解公式的正确性。本文结果也可通过编写计算机程序进行计算, 非齐次项取不同形式时有不同形式的特解, 其它形式的特解有待进一步研究。

#### 参考文献:

- [1] 化存才. 常系数非齐次线性微分方程组特解公式的新推导及其应用 [J]. 云南师范大学学报, 2004, 24(4): 1-5
- [2] 孙丽强. 几种常系数线性非齐次方程组的特解的求法 [J]. 青岛大学师范学院学报, 1997, 14(2): 12-16
- [3] 吴幼明, 何小媚. 一类常系数微分方程组的通解 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2006, 19(2): 68-71
- [4] 吴幼明, 孔碧洁, 何小媚. 一类二阶常微分方程组的特解公式 [J]. 佛山科学技术学院学报: 自然科学版, 2006, 24(4): 7-11
- [5] 吴幼明, 孔碧洁. 一类二阶常微分方程组特解形式的探讨 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2007, 20(1): 20-25
- [6] 吴幼明, 周文苑. 一类二阶微分方程组的特解 [J]. 洛阳师范学院学报, 2009, 28(2): 1-6
- [7] 吴幼明, 罗旗帜. 一类二阶常系数微分方程组的通解 [J]. 佛山科学技术学院学报: 自然科学版, 2002, 20(2): 10-14
- [8] 吴幼明, 王向东, 岳珠峰. 一类二阶微分方程组的通解 [J]. 汕头大学学报: 自然科学版, 2007, 22(3): 15-20

### Particular Solutions to a Kind of Matrix Ordinary Differential Equation

WU Youming, HE Peiting

(Department of Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China)

**Abstract** Based on differential equations theory and matrix theory and by the method of undetermined matrix and column comparison, the paper is devoted to provide a particular solution of finding a kind of systems of three-dimensional second order differential equations with constant coefficients. And the non-homogeneous terms of differential equations are the form of quadratic polynomial multiplied by exponential function. Two special cases are discussed in detail. For example, the particular solution formulas are validated. The results presented in the paper are generalization of previous works done by the authors of the paper, thus giving a foundation for the study of the method of solve on differential equations.

**Key words** constant coefficients, differential equations, method of undetermined matrix, particular solutions