

一类具有时滞的投影神经网络系统的指数稳定性

许金快¹, 黄元清², 钟守铭¹

(1. 电子科技大学应用数学学院, 成都 610054 2 四川理工学院计算机学院, 四川 自贡 643000)

摘要: 文章研究了一类具有时滞的投影神经网络的稳定性问题, 根据这类神经网络的特点, 将神经网络的状态变量进行分块, 通过构造 Lyapunov 泛函, 导出了神经网络系统指数稳定性的充分条件, 在适当的初始条件下, 给出的稳定性条件与分块矩阵的某些块无关, 表明我们获得的条件的优越性。

关键词: 时滞; 神经网络; Lyapunov 泛函; 指数稳定性

中图分类号: O 231

文献标识码: A

引言

在许多科学与工程领域中, 广泛地存在最优化的问题, 这些问题通常包含了时滞, 诸如信号处理、系统识别和机器人运动控制等, 由于时滞的出现, 使得有些本来稳定地神经网络系统变为不稳定了, 因此需要对具有时滞的系统进行深入的研究。在过去的二十年来, 对优化问题的神经网络系统和具有时滞的细胞神经网络系统的理论、方法和应用已经取得了丰富的研究成果^[1-5]。1986年, Tank 和 Hopfield 提出了线性规划神经网络电路^[6], 并证明了所给出的网络的能量函数对于时间的增加是不增的。然后 Kennedy 和 Chua 利用惩罚函数的方法, 提出了求解非线性凸规划问题的神经网络^[7], 根据惩罚函数的特性, 实现了 Kennedy-Chua 神经网络的平衡点的 Kuhn-Tucker 最优化条件。然而, 当惩罚参数足够大时, 网络是不收敛的。文献 [8-10] 利用 Lagrange 乘法理论, 提出了 Lagrange 规划神经网络。文献 [11] 通过重新定义二次函数的 Lagrange 乘法, 进一步提出了处理 Lagrange 神经网络的不等式约束, 建立了求解一些非线性规划和二次规划问题的方法。文献 [12-14] 发展了求解线性规划和二次规划问题的方法, 证明了当目标函数是凸函数时, 神经网络系统的近似解收敛到某个确定的精确解。对于强迫的优化问题, 文献 [15-16] 提出了投影神经网络模型, 并给出了神经网络收敛的条

件。本文研究了一类具有时滞的投影神经网络的稳定性问题, 根据这类神经网络的特点, 将神经网络的状态变量进行分块, 通过构造 Lyapunov 泛函, 导出了神经网络系统指数稳定性的充分条件, 在适当的初始条件下, 给出的稳定性条件与分块矩阵的某些块无关, 显示了我们给出的条件降低了收敛范围的保守性。

1 问题的描述

根据优化模型的对偶原理, 可将优化问题转变为神经网络问题, 因此我们研究如下具有时滞的投影神经网络系统:

$$\frac{du}{dt} = -2u + P_{\Omega}(u - \alpha(Mu - q)) + u(t - \tau) \quad (1)$$

其中 $u \in \mathbf{R}^l$ 为网络的状态变量, $q \in \mathbf{R}^l$ 为常数向量, α 是一个正常数, M 是一个 $l \times l$ 常数矩阵, $\tau > 0$ 是一个常时滞。 $\Omega = \{u \in \mathbf{R}^l \mid d_i \leq u_i \leq h_i, i \in I\}$, $I \subset L$, $L = \{1, 2, \dots, l\}$ 和 $P_{\Omega}: \mathbf{R}^l \rightarrow \Omega$ 是一个投影算子, 并且 $P_{\Omega}(u) = [P_{\Omega}(u_1), P_{\Omega}(u_2), \dots, P_{\Omega}(u_l)]^T$, 其中 $P_{\Omega}(u_i) = u_i$ $\in L - I$ 对 $i \in I$

$$P_{\Omega}(u_i) = \begin{cases} d_i & u_i < d_i \\ u_i & d_i \leq u_i \leq h_i \\ h_i & u_i > h_i \end{cases}$$

2 主要结果

对系统 (1) 作变换, 令 $x = u - \alpha(Mu - q) = (I -$

$\alpha M)u + \alpha q$ 代入 (1) 式可得

$$\frac{dx}{dt} = -2x + (I - \alpha M)P_\Omega(x) + x(t - \tau) + \alpha q \quad (2)$$

重排 $\{x_1, x_2, \dots, x_l\}$, 仍用 x 表示, 使得

$$I_1 = L - I = \{1, 2, \dots, r\}, I = \{r+1, r+2, \dots, l\} \quad (3)$$

这里 r 是非负整数。

将变量 x 、 $P_\Omega(x)$ 、常数向量和矩阵 q 、 M 进行分块为

$$x = \begin{pmatrix} x_{(1)} \\ x_{(2)} \end{pmatrix}, x_{(1)} = (x_1, x_2, \dots, x_r)^T$$

$$x_{(2)} = (x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_l)^T$$

$$q = \begin{pmatrix} q_{(1)} \\ q_{(2)} \end{pmatrix}, q_{(1)} = (q_1, q_2, \dots, q_r)^T$$

$$q_{(2)} = (q_{r+1}, q_{r+2}, \dots, q_l)^T$$

$$P_\Omega(x) = \begin{pmatrix} x_{(1)} \\ P_\Omega(x_{(2)}) \end{pmatrix}$$

$$P_\Omega(x_{(2)}) = (P_\Omega(x_{r+1}), P_\Omega(x_{r+2}), \dots, P_\Omega(x_l))^T$$

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

其中 M_{ij} ($i, j = 1, 2$) 具有相应的维数, 因此系统 (2) 可以表示成:

$$\begin{cases} \frac{dx_{(1)}}{dt} = -(I_r + \alpha M_{11})x_{(1)} - \alpha M_{12}P_\Omega(x_{(2)}) \\ \quad + x_{(1)}(t - \tau) + \alpha q_{(1)} \\ \frac{dx_{(2)}}{dt} = -2x_{(2)} - \alpha M_{21}x_{(1)} + (I_{l-r} - \alpha M_{22})P_\Omega(x_{(2)}) \\ \quad + x_{(2)}(t - \tau) + \alpha q_{(2)} \end{cases} \quad (4)$$

我们有如下结论:

定理 1 如果 M_{11} 是可逆矩阵, 则系统 (4) 存在平衡点。

点。

证明 如果系统 (4) 有平衡点 $x^* = ((x_{(1)}^*)^T, (x_{(2)}^*)^T)^T$

$= (x_1^*, x_2^*, \dots, x_l^*)^T$, 则有

$$\begin{cases} -\alpha M_{11}x_{(1)}^* - \alpha M_{12}P_\Omega(x_{(2)}^*) + \alpha q_{(1)} = 0 \\ -x_{(2)}^* - \alpha M_{21}x_{(1)}^* + (I_{l-r} - \alpha M_{22})P_\Omega(x_{(2)}^*) \\ + \alpha q_{(2)} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

由于 M_{11} 可逆, 有

$$\begin{cases} x_{(1)}^* = -M_{11}^{-1}M_{12}P_\Omega(x_{(2)}^*) + M_{11}^{-1}q_{(1)} \\ x_{(2)}^* = (\alpha M_{21}M_{11}^{-1}M_{12} + I_{l-r} - \alpha M_{22})P_\Omega(x_{(2)}^*) \\ \quad - \alpha M_{21}M_{11}^{-1}q_{(1)} + \alpha q_{(2)} \end{cases} \quad (6)$$

即系统 (4) 有平衡点的充要条件是方程 (6) 有解, 因此

我们考虑变换

$$T \begin{pmatrix} x_{(1)} \\ x_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M_{11}^{-1}M_{12} \\ \alpha M_{21}M_{11}^{-1}M_{12} + I_{l-r} - \alpha M_{22} \end{pmatrix} P_\Omega(x_{(2)}) + \begin{pmatrix} M_{11}^{-1}q_{(1)} \\ -\alpha M_{21}M_{11}^{-1}q_{(1)} + \alpha q_{(2)} \end{pmatrix} \quad (7)$$

如果式 (7) 中变换 T 有不动点, 则不动点为式 (6) 的解, 即系统 (4) 有平衡点。下证 T 有平衡点。对式 (7) 两边取范数, 我们有

$$\begin{aligned} \left\| T \begin{pmatrix} x_{(1)} \\ x_{(2)} \end{pmatrix} \right\| &\leq [\|M_{11}^{-1}M_{12}\| \\ &+ \| \alpha M_{21}M_{11}^{-1}M_{12} + I_{l-r} - \alpha M_{22} \|] \|P_\Omega(x_{(2)})\| \\ &+ \|M_{11}^{-1}q_{(1)}\| + \alpha \|M_{21}M_{11}^{-1}q_{(1)} + q_{(2)}\| \\ &\leq [\|M_{11}^{-1}M_{12}\| + \| \alpha M_{21}M_{11}^{-1}M_{12} + I_{l-r} - \alpha M_{22} \|] \cdot L \\ &+ \|M_{11}^{-1}q_{(1)}\| + \alpha \|M_{21}M_{11}^{-1}q_{(1)} + q_{(2)}\| = \Pi \end{aligned}$$

其中 $L = \max_{i=1, 2, \dots, l} \{|d_i|, |h_i|\}$ 。

易知 $T: \Theta \rightarrow \Theta$ 是一个连续映射, 其中 $\Theta = \{x | x \in \Pi, x \in \mathbf{R}^n\}$, 而且 Θ 是一个凸集。显然, T 将有界凸集映射到有界凸集, 根据不动点原理, T 至少存在一个不动点 x^* , 使得

$$T \begin{pmatrix} x_{(1)}^* \\ x_{(2)}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{(1)}^* \\ x_{(2)}^* \end{pmatrix}$$

因此 x^* 是系统 (4) 的平衡点。

假设 x^* 是系统 (4) 的平衡点, 令 $y = x - x^*$, 则系统 (4) 等价于:

$$\begin{cases} \frac{dy_{(1)}}{dt} = -(I_r + \alpha M_{11})y_{(1)} - \alpha M_{12}Q_\Omega(y_{(2)}) \\ \quad + y_{(1)}(t - \tau) \\ \frac{dy_{(2)}}{dt} = -2y_{(2)} - \alpha M_{21}y_{(1)} \\ \quad + (I_{l-r} - \alpha M_{22})Q_\Omega(y_{(2)}) + y_{(2)}(t - \tau) \end{cases} \quad (8)$$

这里

$$y = \begin{pmatrix} y_{(1)} \\ y_{(2)} \end{pmatrix}, y_{(1)} = (y_1, y_2, \dots, y_r)^T$$

$$y_{(2)} = (y_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_l)^T$$

$$Q_\Omega(y_{(2)}) = P_\Omega(y_{(2)} + x_{(2)}^*) - P_\Omega(x_{(2)}^*)$$

注意到 P_Ω 的定义, 我们有 $Q_\Omega(0) = 0$ 再将 $y_{(2)}$ 重新排列, 仍用 $y_{(2)}$ 表示。把集合 I 进行分解, 有

$$I_2 = \{r+1, r+2, \dots, r+m\}$$

$$I_3 = \{r+m+1, r+m+2, \dots, r+m+n\}$$

$$I_4 = \{r+m+n+1, r+m+n+2, \dots, l\}$$

这里 m, n 是两个非负的整数。使得

$$x_i^* = \begin{cases} < d_i, & i \in I_2 \\ x_i^*, & i \in I_3 \\ > h_i, & i \in I_4 \end{cases}$$

令 $y_{(2)} = (y_{(2)}, y_{(3)}, y_{(4)})^T$, 其中:

$$\begin{aligned} y_{(2)} &= (y_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_{r+m})^T \\ y_{(3)} &= (y_{r+m+1}, y_{r+m+2}, \dots, y_{r+m+n})^T \\ y_{(4)} &= (y_{r+m+n+1}, y_{r+m+n+2}, \dots, y_l)^T \end{aligned}$$

因此系统 (8) 可以变为

$$\begin{cases} \frac{dy_{(1)}}{dt} = - (I_r + \alpha M_{11})y_{(1)} + A_{12}Q_\Omega(y_{(2)}) \\ + A_{13}Q_\Omega(y_{(3)}) + A_{14}Q_\Omega(y_{(4)}) + y_{(1)}(t - \tau) \\ \frac{dy_{(2)}}{dt} = - 2y_{(2)} + A_{21}y_{(1)} + A_{22}Q_\Omega(y_{(2)}) \\ + A_{23}Q_\Omega(y_{(3)}) + A_{24}Q_\Omega(y_{(4)}) + y_{(2)}(t - \tau) \\ \frac{dy_{(3)}}{dt} = - 2y_{(3)} + A_{31}y_{(1)} + A_{32}Q_\Omega(y_{(2)}) \\ + A_{33}Q_\Omega(y_{(3)}) + A_{34}Q_\Omega(y_{(4)}) + y_{(3)}(t - \tau) \\ \frac{dy_{(4)}}{dt} = - 2y_{(4)} + A_{41}y_{(1)} + A_{42}Q_\Omega(y_{(2)}) \\ + A_{43}Q_\Omega(y_{(3)}) + A_{44}Q_\Omega(y_{(4)}) + y_{(4)}(t - \tau) \end{cases} \quad (9)$$

这里

$$-\alpha M_{12} = (A_{12}, A_{13}, A_{14}), \quad -\alpha M_{21} = \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \\ A_{41} \end{bmatrix}$$

$$(I_{l-r} - \alpha M_{22}) = \begin{bmatrix} A_{22}A_{23}A_{24} \\ A_{32}A_{33}A_{34} \\ A_{42}A_{43}A_{44} \end{bmatrix}$$

$$Q_\Omega(y_{(2)}) = [Q_\Omega(y_{(2)})^T, Q_\Omega(y_{(3)})^T, Q_\Omega(y_{(4)})^T]^T$$

记

$$k = \min \{ \min_{i \in I_2} (x_i^* - h_i), \min_{i \in I_3} (d_i - x_i^*) \}$$

由 I 分解可知 $k > 0$

考虑系统 (2) 的初始条件为 $x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta)$,

$\theta \in [-\tau, 0]$ 其中 $\varphi(\theta)$ 是有界连续函数, 记

$$\|\varphi - x^*\|_\tau = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \|\varphi(\theta) - x^*\|$$

现假设初始值 $\|\varphi - x^*\|_\tau < k$ 根据初始值的解的

连续依赖性, 存在一个 T , 使得对任何 $t \in [t_0, T]$, 有

$|y_i(t)| < k (i = 1, 2, \dots, l)$ 。此时有 $Q_\Omega(y_{(2)}) \equiv 0$

$Q_\Omega(y_{(4)}) \equiv 0$ 系统 (9) 可以变为:

$$\begin{cases} \frac{dy_{(1)}}{dt} = - (I_r + \alpha M_{11})y_{(1)} + A_{13}Q_\Omega(y_{(3)}) + y_{(1)}(t - \tau) \\ \frac{dy_{(2)}}{dt} = - 2y_{(2)} + A_{21}y_{(1)} + A_{22}Q_\Omega(y_{(2)}) + y_{(2)}(t - \tau) \\ \frac{dy_{(3)}}{dt} = - 2y_{(3)} + A_{31}y_{(1)} + A_{33}Q_\Omega(y_{(3)}) + y_{(3)}(t - \tau) \\ \frac{dy_{(4)}}{dt} = - 2y_{(4)} + A_{41}y_{(1)} + A_{43}Q_\Omega(y_{(3)}) + y_{(4)}(t - \tau) \end{cases} \quad (10)$$

我们有如下定理:

定理 2 如果对于系统 (10), 若存在 $\varepsilon > 0, \beta > 0$

使得

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} & A_{31}^T & I_r & 0 \\ * & (\varepsilon + \beta - 4)I_{l-r} & 0 & I_{l-r} \\ * & * & -I_r & 0 \\ * & * & * & -I_{l-r} \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \leq 0$$

其中 $\varphi_{11} = (2 - \varepsilon - e^{\varepsilon\tau})I_r + \alpha(M_{11} + M_{11}^T)$, * 表示分块对称矩阵的相应的对称块, 则系统 (1) 的平衡点是指数稳定的。

证明 先考虑系统 (10) 的第一和第三个方程, 即

$$\begin{cases} \frac{dy_{(1)}}{dt} = - (I_r + \alpha M_{11})y_{(1)} + A_{13}Q_\Omega(y_{(3)}) \\ + y_{(1)}(t - \tau) \\ \frac{dy_{(3)}}{dt} = - 2y_{(3)} + A_{31}y_{(1)} + A_{33}Q_\Omega(y_{(3)}) \\ + y_{(3)}(t - \tau) \end{cases} \quad (11)$$

取 Lyapunov 泛函为

$$\begin{aligned} V(t, y_t) &= \|y_{(1)}(t)\|^2 e^{\varepsilon(t-t_0)} + \|y_{(3)}(t)\|^2 e^{\varepsilon(t-t_0)} \\ &+ \int_t^{t+\tau} y_{(1)}^2(s) e^{\varepsilon(s-t_0)} ds + \int_t^{t+\tau} y_{(3)}^2(s) e^{\varepsilon(s-t_0)} ds \end{aligned}$$

泛函 $V(t, y_t)$ 沿系统 (11) 的轨线求导, 有

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(t, y_t)}{dt} \right|_{(11)} &= \varepsilon \|y_{(1)}(t)\|^2 e^{\varepsilon(t-t_0)} + \varepsilon \|y_{(3)}(t)\|^2 e^{\varepsilon(t-t_0)} \\ &+ 2e^{\varepsilon(t-t_0)} y_{(1)}^T(t) \\ &\cdot [- (I_r + \alpha M_{11})y_{(1)} + A_{13}Q_\Omega(y_{(3)}) + y_{(1)}(t - \tau)] \\ &+ 2e^{\varepsilon(t-t_0)} y_{(3)}^T(t) \\ &\cdot [- 2y_{(3)} + A_{31}y_{(1)}(t) + A_{33}Q_\Omega(y_{(3)}) + y_{(3)}(t - \tau)] \\ &+ e^{\varepsilon(t-t_0)} [e^{\varepsilon\tau} \|y_{(1)}(t)\|^2 + e^{\varepsilon\tau} \|y_{(3)}(t)\|^2 \\ &- \|y_{(1)}(t - \tau)\|^2 - \|y_{(3)}(t - \tau)\|^2] \\ &= e^{\varepsilon(t-t_0)} \{ - y_{(1)}^T(t) ((2 - \varepsilon)I_r + \alpha(M_{11} + M_{11}^T)) y_{(1)}^T(t) \\ &+ 2y_{(1)}^T(t) A_{31}^T y_{(3)}(t) + 2y_{(1)}^T(t) y_{(1)}(t - \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2y_{(1)}^T(t)A_{13}Q_{\Omega}(y_{(3)}(t)) - (4 - \varepsilon)y_{(3)}^T(t)y_{(3)}(t) \\
 & + 2y_{(3)}^T(t)A_{33}Q_{\Omega}(y_{(3)}(t)) + 2y_{(3)}^T(t)y_{(3)}(t - \tau) \} \\
 & + e^{\varepsilon(t-t_0)} [e^{\varepsilon\tau} \|y_{(1)}(t)\|^2 + e^{\varepsilon\tau} \|y_{(3)}(t)\|^2 \\
 & - \|y_{(1)}(t - \tau)\|^2 - \|y_{(3)}(t - \tau)\|^2] \\
 = & e^{\varepsilon(t-t_0)} \{ - y_{(1)}^T((2 - \varepsilon - e^{\varepsilon\tau})I_r + \alpha(M_{11} + M_{11}^T)) \\
 & \cdot y_{(1)}^T + 2y_{(1)}^T(t)A_{31}^T y_{(3)}(t) + 2y_{(1)}^T(t)y_{(1)}(t - \tau) \\
 & + 2y_{(1)}^T(t)A_{13}Q_{\Omega}(y_{(3)}(t)) - (4 - \varepsilon)y_{(3)}^T(t)y_{(3)}(t) \\
 & + 2y_{(3)}^T(t)A_{33}Q_{\Omega}(y_{(3)}(t)) + 2y_{(3)}^T(t)y_{(3)}(t - \tau) \} \\
 & - e^{\varepsilon(t-t_0)} [\|y_{(1)}(t - \tau)\|^2 + \|y_{(3)}(t - \tau)\|^2] \quad (12)
 \end{aligned}$$

根据 P_{Ω} 的定义可知

$$Q_{\Omega}(y_{(3)}(t)) \leq y_{(3)}(t)$$

即

$$Q_{\Omega}^T(y_{(3)}(t))Q_{\Omega}(y_{(3)}(t)) \leq y_{(3)}^T(t)y_{(3)}(t)$$

于是, 对任意 $l > 0$ 有

$$\begin{aligned}
 & \beta e^{\varepsilon(t-t_0)} [- Q_{\Omega}^T(y_{(3)}(t))Q_{\Omega}(y_{(3)}(t)) \\
 & + y_{(3)}^T(t)y_{(3)}(t)] \geq 0 \quad (13)
 \end{aligned}$$

将式 (13) 代入式 (12), 我们有

$$\left. \frac{dV(t, y_t)}{dt} \right|_{(11)} \leq e^{\varepsilon(t-t_0)} X^T(t) \Phi X(t)$$

其中

$$\begin{aligned}
 X^T(t) = & (y_{(1)}^T(t), y_{(3)}^T(t), y_{(1)}^T(t - \tau), y_{(3)}^T(t - \tau), Q_{\Omega}^T(y_{(3)}(t))) \\
 \Phi = & \begin{pmatrix} \varphi_{11} & A_{31}^T & I_r & 0 & A_{13} \\ * & (\varepsilon + \beta - 4)I_{L_r} & 0 & I_{L_r} & A_{33} \\ * & * & -I_r & 0 & 0 \\ * & * & * & -I_{L_r} & 0 \\ * & * & * & * & -\beta I_{L_r} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

由定理 2 的条件可知,

$$\left. \frac{dV(t, y_t)}{dt} \right|_{(11)} \leq e^{\varepsilon(t-t_0)} X^T(t) \Phi X(t) \leq 0$$

即

$$V(t, y_t) \leq V(t_0, y_{t_0})$$

注意到

$$\begin{aligned}
 & [\|y_{(1)}(t)\|^2 + \|y_{(3)}(t)\|^2] e^{\varepsilon(t-t_0)} \leq V(t, y_t) \text{ 和} \\
 & V(t_0, y_{t_0}) = (1 + \tau e^{\varepsilon\tau}) \| \varphi - x^* \|^2
 \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
 \|y_{(1)}(t)\| & \leq \Gamma \| \varphi - x^* \| e^{-\frac{\varepsilon}{\tau}(t-t_0)} \\
 \|y_{(3)}(t)\| & \leq \Gamma \| \varphi - x^* \| e^{-\frac{\varepsilon}{\tau}(t-t_0)}
 \end{aligned}$$

其中 $\Gamma = \sqrt{1 + \varepsilon e^{\varepsilon\tau}}$.

对于系统 (11) 的第二个方程, 利用常数变易法, 有

$$y_{(2)}(t) = y_{(2)}(t_0) e^{-2(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-2(t-s)} [A_{21}y_{(1)}(s)$$

$$+ A_{23}Q_{\Omega}(y_{(3)}(s)) + y_{(2)}(s - \tau)] ds$$

两边取范数, 有

$$\begin{aligned}
 \|y_{(2)}(t)\| & \leq \|y_{(2)}(t_0)\| e^{-2(t-t_0)} \\
 & + \int_{t_0}^t e^{-2(t-s)} [\|A_{21}\| \|y_{(1)}(s)\| \\
 & + \|A_{23}\| \|Q_{\Omega}(y_{(3)}(s))\| + \|y_{(2)}(s - \tau)\|] ds \\
 & \leq \Gamma \| \varphi - x^* \| e^{-2(t-t_0)} \\
 & + \int_{t_0}^t e^{-2(t-s) - \frac{\varepsilon}{\tau}(s-t_0)} [\|A_{21}\| + \|A_{23}\| + e^{\varepsilon\tau}] ds \\
 & \leq \Gamma \left[1 + \frac{2(e^{\varepsilon\tau} + \|A_{21}\| + \|A_{23}\|)}{4 - \varepsilon} \right] \| \varphi - x^* \| e^{-\frac{\varepsilon}{\tau}(t-t_0)}
 \end{aligned}$$

类似地, 对于系统 (11) 的第四个方程, 有

$$\begin{aligned}
 \|y_{(4)}(t)\| & \leq \Gamma \left[1 + \frac{2(e^{\varepsilon\tau} + \|A_{41}\| + \|A_{43}\|)}{4 - \varepsilon} \right] \| \varphi - x^* \| e^{-\frac{\varepsilon}{\tau}(t-t_0)}
 \end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned}
 \Delta = & \Gamma + \Gamma \max \left\{ \frac{2(e^{\varepsilon\tau} + \|A_{41}\| + \|A_{43}\|)}{4 - \varepsilon}, \right. \\
 & \left. \frac{2(e^{\varepsilon\tau} + \|A_{41}\| + \|A_{43}\|)}{4 - \varepsilon} \right\}
 \end{aligned}$$

则有

$$\|y_{(i)}(t)\| \leq \Delta \| \varphi - x^* \| e^{-\frac{\varepsilon}{\tau}(t-t_0)} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

于是, 我们取初始函数满足 $\| \varphi - x^* \| < \frac{k}{\Delta}$, 对 $\forall t \geq$

t_0 具有 $\|y_{(i)}(t)\| < k (i = 1, 2, 3, 4)$, 所以, 对 $\forall t \geq t_0$, 均有

$$\|y_{(i)}(t)\| \leq \Delta \| \varphi - x^* \| e^{-\frac{\varepsilon}{\tau}(t-t_0)} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

表明系统 (4) 的零解是指数稳定的, 也就是说, 系统 (1) 的平衡点是指数稳定的。

注: 在定理 2 的条件中, 与 A_{12} 、 A_{14} 、 A_{21} 、 A_{22} 、 A_{23} 、 A_{24} 、 A_{32} 、 A_{34} 、 A_{41} 、 A_{42} 、 A_{43} 和 A_{44} 无关, 所以这些块上的系数任意取时, 不影响系统的稳定性。

3 结束语

本文研究了一类具有时滞的常系数投影神经网络的稳定性问题, 首先根据投影神经网络的特点, 将神经网络的状态变量进行分块, 使系统变为系统 (4) 的形式, 通过 Gronwall 不等式, 给出了系统存在平衡点的充分条件, 然后再将系统 (4) 进行分块, 得到系统 (9), 在适当的初始条件下, 系统 (9) 变为系统 (10), 对于系统 (10), 通过构造 Lyapunov 泛函, 导出了神经网络系统指数稳定性的充分条件, 我们所得到的稳定性条件仅与系数矩阵 M_{11} 、 A_{13} 、 A_{31} 和 A_{33} 有关, 与系数矩阵的其它块的系数无关, 显示了我们给出的条件具有很好的优越性。

参考文献:

- [1] Akca H, A lassar R, Covachev V, et al Continuous-time additive Hopfield-type neural networks with impulsives[J]. *J Math Anal Appl*, 2004, 436-451.
- [2] Xia Y S, Vincent T L. On the stability of global projected dynamical systems[J]. *J Optim Theory Appl*, 2000, 106: 129-50.
- [3] Xia Y S. Further results on global convergence and stability of global projected dynamical systems[J]. *J Optim Theory Appl*, 2004, 122: 627-49.
- [4] Xia Y S, Wang J. A general projection neural network for solving monotone variational inequalities and related optimization problems[J]. *IEEE Trans Neural Networks*, 2004, 15: 318-28.
- [5] Zhong Shouming, Liu Xinzhong. Exponential Stability and Periodicity of Cellular Neural Networks with Time Delay[J]. *Math Comput modelling* 2007, 45: 1231-1240.
- [6] Tank D W, Hopfield J J. Simple neural optimization network as an A/D converter, signal decision circuit and a linear programming circuit[J]. *IEEE Trans Neural Networks* 1998, 9: 1040-1043.
- [7] Kennedy M P, Chua L O. Neural networks for nonlinear programming[J]. *IEEE Trans Circuits Systems* 1988, 35: 554-562.
- [9] Wu A, Tam P K S. A neural network methodology and strategy of quadratic optimization[J]. *Neural Comput Appl* 1999, 8: 283-289.
- [10] Effati S, Baymani M. A new nonlinear neural network for solving convex nonlinear programming problems[J]. *Appl Math Comput* 2005, 168: 1370-1379.
- [11] Huang Y. Lagrange-type neural networks for nonlinear programming problems with inequality constraints[C]. *Proceedings of the 44th IEEE conference on Decision and Control and the European Control Conference*, 2005, 4129-4133.
- [12] Xia Y S. A new neural network for solving linear and quadratic programming problems[J]. *IEEE Trans Neural Networks*, 1996, 7(6): 1544-1547.
- [13] Tao Q, Cao J D, Xue M S, et al. A high performance neural network for solving nonlinear programming problems with hybrid constraints[J]. 2001, 288(2): 88-94.
- [14] Wang J, Hu Q, Jiang D. A Lagrangian neural network for kinematic control of redundant robot manipulators[J]. *IEEE Trans Neural Networks*, 1999, 10(5): 1123-1132.
- [15] Wang J, Hu Q, Jiang D. A Lagrangian neural network for kinematic control of redundant robot manipulators[J]. *IEEE Trans Neural Networks*, 1999, 10(5): 1123-1132.
- [16] Xia Y S, Wang J. A general projection neural network for solving monotone variational inequality and related optimization problems[J]. *IEEE Trans Neural Networks*, 2004, 15(2): 318-329.

Exponential Stability of Projected Neural Networks System with the Delay

XU Jin-kua¹, HUANG Yuan-qing², ZHONG Shou-ming¹

(1. School of Applied Mathematics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China;

2. School of Computer Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract Stability problem of projected neural networks system with delay is studied. By dividing the projected neural networks system state varied into subgroups according to the characters of the projected neural networks, sufficient conditions for exponential stability is derived from via constructing Lyapunov functional. Those conditions suitable are associated with some initial value and represented by some blocks of the interconnection matrix.

Key words delay, neural networks, Lyapunov functional, exponential stability