

一类食饵-捕食系统的定性分析

罗廷友¹, 刘启宽¹, 李映辉²

(1. 成都信息工程学院数学学院, 成都 610225; 2 西南交通大学力学与工程学院, 成都 610031)

摘要: 文章研究一类食饵具常数投放且增长率含 $h(x)$ 的食饵-捕食系统。利用常微分方程定性和稳定性理论分析了平衡点的性态, 借助 Dulac 函数法得到了正平衡点全局渐近稳定的充分条件, 最后利用 Poincaré-Bendixson 环域定理和张芷芬唯一性定理, 证明了极限环存在唯一的充分条件, 并给出了数值模拟结果。

关键词: 食饵-捕食系统; 平衡点; 增长率; 极限环

中图分类号: O175.12

文献标识码: A

引言

对生态系统如何进行合理的调控, 是人们非常感兴趣的问题。近年来, 人们为了更为准确地预测实际情况, 已经开始深入研究各类食饵-捕食者的两种群模型变化规律。

文献 [5] 研究了如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx) - ky\sqrt{x} + h \\ \dot{y} = y(-d + ke\sqrt{x}) \end{cases}$$

给出了具次线性功能性反应函数的捕食系统的一些定性结论。

文献 [6] 研究了如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - b\sqrt{x} - cx) - \alpha y\sqrt{x} + h \\ \dot{y} = y(-w + \alpha e\sqrt{x}) \end{cases}$$

给出了功能性反应函数为 \sqrt{x} 的捕食系统的一些定性结论。

本文在文献 [5] 和文献 [6] 的基础上研究如下的系统 (1):

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - b\sqrt{x} - cx - h(x)) - \alpha y\sqrt{x} + r \\ \dot{y} = y(-w + k\alpha\sqrt{x}) \end{cases}$$

其中 a, b, c, α, w, k 均为具有一定生物意义的正常数, r

≥ 0 , $a - b\sqrt{x} - cx - h(x)$ 代表食饵种群的相对增长率, $\alpha\sqrt{x}$ 代表一个个体捕食者的捕食率; r 代表食饵种群的投放率; w 代表捕食种群的自然死亡率; k 代表捕食者的转化率。设系统 (1) 中的 $h(x)$ 满足条件 $h(0) = 0$, $h^{(m)}(x) \geq 0$, $m = 1, 2$ 及 $x > 0$ 。基于生态学意义, 仅在区域 $\Omega = \{(x, y) | x > 0, y \geq 0\}$ 内考虑。

显然, $x = 0$ 是系统 (1) 的无切线段, 因此可以作变换 $\bar{x} = \frac{k\alpha\sqrt{x}}{w}$, $\bar{y} = \frac{k\alpha^2 y}{2w}$, 并仍以 x, y 分别表示 \bar{x}, \bar{y} 。于是可将系统 (1) 化为系统 (2):

$$\begin{cases} \dot{x} = x(A - Bx - Cx^2 - \frac{1}{2}h(Dx^2)) - y + \frac{R}{x} \\ \equiv Q(x, y) \\ \dot{y} = wy(-1 + x) \equiv P(x, y) \end{cases}$$

其中

$$A = \frac{a}{2}, B = \frac{bw}{2k\alpha}, C = \frac{aw^2}{2k^2\alpha^2}, D = \frac{w^2}{k^2\alpha^2}, R = \frac{rk^2\alpha^2}{2w^2}$$

1 平衡点分析

将 $x = 1$ 代入 $P(x, y) = 0$ 解得:

$$y = A - B - C - \frac{1}{2}h(D) + R$$

则当 $A - B - C - \frac{1}{2}h(D) + R \geq 0$ 时, 系统 (2) 有平衡

点 $N(1, \lambda(1) - B - C - \frac{1}{2}h(D) + R)$ 。

将 $y = 0$ 代入 $P(x, y) = 0$ 解得:

$$x(A - Bx - Cx^2 - \frac{1}{2}h(Dx^2)) + \frac{R}{x} = 0$$

令 $\lambda(x) = x^2(A - Bx - Cx^2 - \frac{1}{2}h(Dx^2)) + R$, 则有

$$\lambda(1) = A - B - C - \frac{1}{2}h(D) + R, \quad \lambda(0) = R > 0$$

由 $h(x) - h(0) = (x - 0)h'(\xi)$ ($x > 0, 0 < \xi < x$), 有 $h(x) > 0$ 从而

$$\lambda(x) < -x^4(C + \frac{B}{x} - \frac{A}{x^2} - \frac{R}{x^4}) \rightarrow -\infty (x \rightarrow +\infty)$$

则至少存在一个正数 x_1 , 使得 $\lambda(x_1) = 0$

$$\lambda'(x) = x[2A - 3Bx - 4Cx^2 - h(Dx^2) - Dx^3h'(Dx^2)]$$

令 $Z(x) = 2A - 3Bx - 4Cx^2 - h(Dx^2) - Dx^2h'(Dx^2)$ 则有

$$Z(0) = 2A > 0$$

$$Z'(x) = -3B - 8Cx - 4Dxh'(Dx^2) - 2D^2x^3h''(Dx^2) < 0$$

所以只存在一个正数 x_0 , 使得 $Z(x_0) = 0$ 当 $0 < x \leq x_0$ 时, $\lambda'(x) > 0$; 当 $x > x_0$ 时, $\lambda'(x) < 0$ 从而存在唯一一个正数 x_1 , 使得 $\lambda(x_1) = 0$ 故系统 (2) 有平衡点 $E(x_1, 0)$ 。

引理 1.1 当 $\lambda(1) \geq 0$ 时, 系统 (2) 有两个平衡点 $E(x_1, 0), N(1, \lambda(1))$; 当 $\lambda(1) < 0$ 时, 系统 (2) 只有一个平衡点 $E(x_1, 0)$ 。

$$\text{下面分析平衡点的性质: 记 } M = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}$$

对于平衡点 $E(x_1, 0)$,

$$DeM \cdot = -w(x_1 - 1)[Bx_1 + 2Cx_1 + Dx_1h'(Dx_1) + \frac{R}{x_1}]$$

$$TM \cdot = -[Bx_1 + 2Cx_1 + Dx_1h'(Dx_1) + \frac{R}{x_1}] + w(x_1 - 1)$$

对于平衡点 $N(1, \lambda(1))$,

$$DeM \cdot = w\lambda(1) > 0$$

$$TM \cdot = A - B - C - \frac{1}{2}h(D) - Dh'(D) - R$$

引理 1.2 (1) 当 $x_1 > 1$ 时, 平衡点 $E(x_1, 0)$ 是鞍点; 当 $x_1 < 1$ 时, 平衡点 $E(x_1, 0)$ 是稳定点。

(2) 当 $A - B - C - \frac{1}{2}h(D) - Dh'(D) - R < 0$ 时,

平衡点 $N(1, \lambda(1))$ 是局部渐近稳定点; 当 $A - B - C - \frac{1}{2}h(D) - Dh'(D) - R > 0$ 时, 平衡点 $N(1, \lambda(1))$ 是不稳定点。

下面在 $\lambda(1) > 0$ 且 $x_1 > 1$ 的条件下讨论系统 (2) 的极限环。

定理 1 当 $A - B - C - \frac{1}{2}h(D) - Dh'(D) - R \leq 0$ 且 $-6A + 12B + 12C + 3h(D) + 3Dh'(D) - 12D^2h''(D) - 4D^3h'''(D) < 0$ 时, 正平衡点 $N(1, \lambda(1))$ 为全局渐近稳定的平衡点。

证明 做 Dulac 函数 $B(x, y) = y^\beta$ (见文献 [7]), 则

$$\frac{\partial(PB)}{\partial x} + \frac{\partial(QB)}{\partial y} = x^{-2}y^\beta [Ax^2 - 2Bx^3 - 3Cx^4 - \frac{1}{2}x^2h(Dx^2) - Dx^4h'(Dx^2) - R + w(\beta + 1)(x^3 - x^2)]$$

记 $m(x) = Ax^2 - 2Bx^3 - 3Cx^4 - \frac{1}{2}x^2h(Dx^2) -$

$$Dx^4h'(Dx^2) - R + w(\beta + 1)(x^3 - x^2)$$

$$m(1) = A - B - C - \frac{1}{2}h(D) - Dh'(D) - R \leq 0$$

下证 $x = 1$ 为 $m(x)$ 的最大值点。

$$m'(1) = 2A - 6B - 12C - h(D) - 5Dh'(D) - 2D^2h''(D) + w(\beta + 1) = 0$$

因此取

$$\beta = -[2A - 6B - 12C - h(D) - 5Dh'(D) - 2D^2h''(D)] / w - 1$$

则可使 $x = 1$ 为 $m(x)$ 的唯一驻点。

$$m''(1) = -6A + 12B + 12C + 3h(D) + 3Dh'(D) - 12D^2h''(D) - 4D^3h'''(D) < 0$$

故 $x = 1$ 为最大值点, 从而 $\frac{\partial(PB)}{\partial x} + \frac{\partial(QB)}{\partial y} \leq 0$

由 Dulac 定理知:

当 $A - B - C - \frac{1}{2}h(D) - Dh'(D) - R < 0$ 且 $-6A + 12B + 12C + 3h(D) + 3Dh'(D) - 12D^2h''(D) - 4D^3h'''(D) < 0$ 时, 系统 (2) 在 Ω 区域内无闭轨线。又由引理 2 知: 正平衡点 $N(1, \lambda(1))$ 为全局渐近稳定的平衡点。

2 极限环的存在性和唯一性

因为 $x = 0$ 为系统 (1) 的无切直线。当 $x > 0$ 时, 我

们将系统 (1) 改写成如下系统 (3):

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha\sqrt{x} \left[\frac{x(a - b\sqrt{x} - cx - h(x)) + r}{\alpha\sqrt{x}} - y \right] \\ = \phi(x) [\varphi(x) - y] \\ \dot{y} = ky \left(-\frac{w}{k} + \alpha\sqrt{x} \right) = ky(\phi(x) - d) \end{cases}$$

其中

$$\phi(x) = \frac{x(a - b\sqrt{x} - cx - h(x)) + r}{\alpha\sqrt{x}}$$

$$\phi(x) = \alpha\sqrt{x} \quad d = \frac{w}{k}$$

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad x_0 = \left(\frac{w}{\alpha b} \right)^2$$

$$\phi'(x) = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{a}{2\sqrt{x}} - b - \frac{3c}{2}\sqrt{x} - \frac{h(x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}h'(x) - \frac{r}{2\sqrt{xx}} \right]$$

$$\phi'(x_0) = \frac{k}{w} [A - 2B - 3C - \frac{1}{2}h(D) - Dh'(D) - R]$$

定理 2 当 $\phi'(x_0) > 0$ 和 $y_0 > 0$ 时, 系统 (3) 在 $\Omega = \{(x, y) | x > 0, y \geq 0\}$ 上围绕 (x_0, y_0) 至少存在一个稳定的极限环。

证明 由 $\phi'(x_0) > 0$ 及 $\phi'(x)$ 的连续性, 知存在 (x_0, y_0) 的领域 $U \subset \Omega$ 使得对任意的 $(x, y) \in U$ 总有 $\phi'(x) > 0$ 现对系统 (3) 取 Lyapunov 函数:

$$V(x, y) = k \int_x^{\phi(x)} \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\phi(x)} dx + \int_y^{y_0} \frac{y - y_0}{y} dy$$

其中 $(x, y) \in U$ 显然 $\int_y^{y_0} \frac{y - y_0}{y} dy > 0$ 而由

$$\phi'(x) = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} > 0 (x > 0)$$

有

$$(x - x_0) \left[\frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\phi(x)} \right] > 0 (x \neq x_0)$$

因此 $V(x, y) > 0 (x, y) \in U \setminus (x_0, y_0)$ 。对 $V(x, y)$ 沿系统 (3) 求导得:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \Big|_{(3)} &= \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= k [\phi(x) - \phi(x_0)] [\varphi(x) - \varphi(x_0)] \\ &= k \phi'(\xi) \varphi'(\eta) (x - x_0)^2 \end{aligned}$$

其中 $(x, y) \in U$, ξ, η 落在以 (x_0, y_0) 为心的某一去心领域内, 所以有 $\frac{dV}{dt} \Big|_{(3)} \geq 0$ 且 $\frac{dV}{dt} \Big|_{(3)} = 0$ 的集合上除了 (x_0, y_0) 外无整条轨线。故 (x_0, y_0) 为不稳定点。

Poincare-Bendixson 环域的外境界线 L 由如下线段构成:

$$L_1 \equiv x = 0 \text{ 则 } \frac{dL_1}{dt} \Big|_{(3)} = \frac{dx}{dt} \Big|_{x=0} = r > 0 \text{ 系统 (3)}$$

穿过 L_1 的轨线从左至右; $L_2 \equiv y = 0$ 为系统 (3) 的轨线; $L_3 \equiv x - x_1 = 0, 0 \leq y \leq F$, 其中

$$F = \max_{x \in [x_0, x_1]} \varphi(x)$$

$$\frac{dL_3}{dt} \Big|_{(3)} = \frac{dx}{dt} \Big|_{x=x_1} = -\alpha y \sqrt{x_1} < 0$$

因此 $L_3 \equiv x - x_1 = 0$ 为系统 (3) 的无切线段, 且穿过 L_3 的轨线从右至左; L_4 为如下模型:

$$\begin{cases} \dot{x} = \phi(x)(F - y) \\ \dot{y} = ky(\phi(x) - d) \end{cases} \quad (4)$$

以 (x_1, F) 为起点的轨线有唯一的正平衡点 (x_0, F) 。当 $x > x_0, y > F$ 时, $\frac{dy}{dx} \Big|_{(4)} < 0$ 因此模型 (4) 过 (x_p, F) 的轨线单调递减且与 $x = x_0$ 相交于 (x_0, G) , 记此段轨线为 L_4 。这时 $G > F$ 。再过 (x_0, G) 作水平线段 $L_5 \equiv y = G = 0$ 因为 $\phi'(x) > 0 (x > 0)$, 所以当 $x < x_0$ 时, $\phi(x) < \phi(x_0) = d$ 从而 $\frac{dL_5}{dt} \Big|_{(4)} = \frac{dy}{dt} \Big|_{y=G} = kG[\phi(x) - d] < 0$ 且穿过 L_5 的轨线从上至下。下面讨论模型 (4) 穿过 L_4 的轨线的走向, 在 L_4 上有:

$$\begin{aligned} \dot{x} \Big|_{(3)} &= \phi(x) [\varphi(x) - y] < \phi(x) [F - y] = \dot{x} \Big|_{(4)} < 0 \\ \dot{y} \Big|_{(3)} &= \dot{y} \Big|_{(4)} = ky[\phi(x) - d] > 0 \end{aligned}$$

因此, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 构成系统 (3) 的 Poincare-Bendixson 环域的外境界线, 且穿过边界的轨线均从外至内。由 Poincare-Bendixson 环域定理知, 系统 (3) 在 $\Omega = \{(x, y) | x > 0, y \geq 0\}$ 上围绕 (x_0, y_0) 至少存在一个稳定的极限环。

因为 $A - 2B - 3C - \frac{1}{2}h(D) - Dh'(D) - R > 0$ 与 $\phi'(x_0) > 0$ 等价; $\lambda(1) > 0$ 与 $y_0 > 0$ 等价, 因此得到下面的这个定理。

定理 3 当 $A - 2B - 3C - \frac{1}{2}h(D) - Dh'(D) - R > 0$ 且 $\lambda(1) > 0$ 时, 系统 (1) 在 $\Omega = \{(x, y) | x > 0, y \geq 0\}$ 上围绕正平衡点 $N(1, \lambda(1))$ 至少存在一个稳定的极限环。

定理 4 当 $A - 2B - 3C - \frac{1}{2}h(D) - Dh'(D) - R > 0$ 且 $\lambda(1) > 0$ 时, 系统 (1) 在 $\Omega = \{(x, y) | x > 0, y \geq 0\}$ 上围绕正平衡点 $N(1, \lambda(1))$ 存在唯一一个稳定的

极限环。

证明 对系统 (2) 作变换 $x = \bar{x} + 1, y = \bar{y} + \lambda(1)$, 仍以 x, y 分别表示新的变量 \bar{x}, \bar{y} , 则有系统 (5):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x + 1)[A - B(x + 1) - C(x + 1)^2 - \frac{1}{2}h(D(x + 1)^2)] - (y + \lambda(1)) + \frac{R}{(x + 1)} \\ \frac{dy}{dt} = w(y + \lambda(1))x \end{cases}$$

再令 $x = u, y + \lambda(1) = \lambda(1)e^v$, 则系统 (5) 可化为:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -F(u) - \Gamma(v) \\ \frac{dv}{dt} = g(u) \end{cases} \quad (6)$$

其中:

$$F(u) = -A(u + 1) + B(u + 1)^2 + C(u + 1)^3 + \frac{1}{2}(u + 1)h(D(u + 1)^2)] - \frac{R}{(u + 1)} + \lambda \quad (1)$$

$$\Gamma(v) = \lambda(1)(e^v - 1), \quad g(u) = wu$$

$$f(u) = F'(u)$$

$$= -A + 2B(u + 1) + 3C(u + 1)^2 + \frac{1}{2}h(D(u + 1)^2) +$$

$$D(u + 1)^2 h'(D(u + 1)^2) + \frac{R}{(u + 1)^2}$$

下面验证系统 (6) 满足张芷芬唯一性定理的条件

$$\textcircled{1} ug(u) = wu^2 > 0 (u \neq 0)$$

$$G(u) = \int g(u) du = \frac{w}{2}u^2$$

$$G(-\infty) = +\infty, G(+\infty) = +\infty$$

$$\textcircled{2} \Gamma(0) = 0, v\Gamma(v) = \lambda(1)v(e^v - 1) > 0 (v > 0)$$

$$\Gamma(-\infty) = -\lambda(1), \Gamma(+\infty) = +\infty, \Gamma'(v) = \lambda(1)e^v > 0$$

$$\textcircled{3} F(0) = -A + B + C + \frac{1}{2}h(D) - R + \lambda(1) = 0$$

$$f(0) = -A + 2B + 3C + \frac{1}{2}h(D) + Dh'(D) + R < 0$$

$$\left[\frac{f(u)}{g(u)} \right]' = \frac{3C}{w} + \frac{1}{wu^2} [A - 2B - 3C - \frac{1}{2}h(D) - Dh'(D) - R] + \frac{R}{wu^2}$$

因为 $A - 2B - 3C - \frac{1}{2}h(D) - Dh'(D) - R > 0$

所以 $\left[\frac{f(u)}{g(u)} \right]' > 0$ 其中 $u > -1$ 且 $u \neq 0$

由张芷芬唯一性定理知系统 (1) 在 $\Omega = \{(x, y) | x > 0, y \geq 0\}$ 上围绕 $N(1, \lambda(1))$ 存在唯一一个稳定的极限环。

3 数值模拟

第 1 种情况:

$$\text{取 } a = 6, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}, h(x) = x^{\frac{1}{2}}, \alpha = 4, r = 2$$

$w = 2, k = \frac{1}{2}$ 得到了第一象限出发的轨线均无限趋近于正平衡点 $N(1, 3)$ 的相图。如图 1 所示。

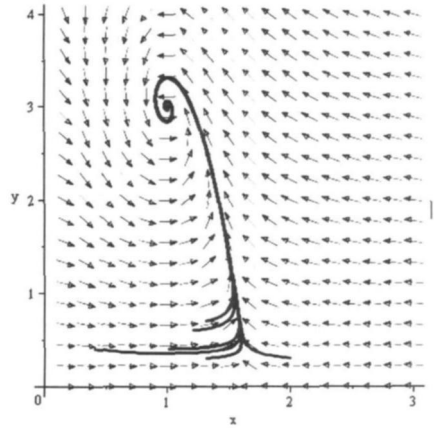


图 1 全局渐近稳定相图

第 2 种情况:

$$\text{取 } a = 10, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}, h(x) = x^{\frac{1}{2}}, \alpha = 4, r = 2$$

$$w = 2, k = \frac{1}{2}$$

得到了正平衡点 $N(1, 5)$ 周围存在唯一一个稳定的极限环的相图。如图 2 所示。

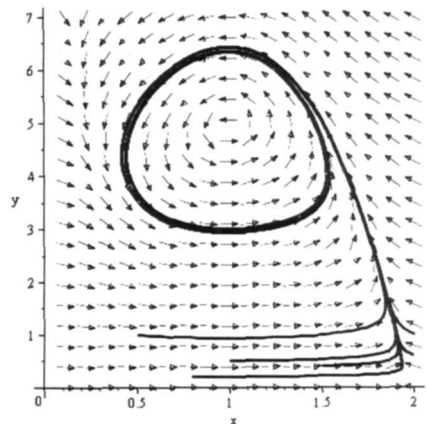


图 2 极限环唯一相图

4 结束语

定理 1 的结论说明在其参数条件下, 两种群可以共存, 最终保持在平衡位置 $N(1, \lambda(1))$ 。定理 4 在满足其

条件时,系统有一个稳定的极限环。这表明食饵种群与捕食者种群均不会灭绝,它们的数量最终将处于一个稳定的周期振荡状态。

参考文献:

- [1] 刘启宽,陈冲,吕海炜.关于 Huxley 方程高阶奇点的定性分析[J].四川理工学院学报:自然科学版,2009,22(4):15-19
- [2] 陈柳娟.稀疏条件下具常数投放率的食饵捕食系统的极限环[J].数学研究,2006,39(3):293-298
- [3] 刘启宽,张兆强,陈冲.一类具有功能反应的食饵捕食模型的定性分析[J].重庆理工大学学报:自然科学版,2010,24(1):118-122.
- [4] 黄军华,周锦芳.一类非线性自治系统的定性分析[J].广西师范学院学报,2008,25(4):39-43
- [5] 匡奕群,邱梅青.具次线性功能反应函数的食饵-捕食者模型的定性分析[J].数学杂志,2010,30(1):125-130
- [6] 杨春霞,王辉,胡志兴.具常数投放率功能反应为 \sqrt{x} 的食饵-捕食模型的定性分析[J].生物数学学报,2010,25(1):97-103
- [7] 张锦炎,冯贝叶.常微分方程几何理论与分支问题[M].北京:北京大学出版社,2000
- [8] 张芷芬,同仁,黄文灶.微分方程定性理论[M].北京:科学出版社,1985

Qualitative Analysis of a Kind of Predator-Prey System

LUO Ting-you¹, LIU Qi-kuan¹, LI Ying-hui²

(1. College of Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China)

2. School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract In this paper, we study a qualitative analysis of predator-prey system with constant rate stocking and rate function which contains $h(x)$. By using qualitative theory and stability theory in ordinary differential equation, we analyze the qualitative behavior of equilibrium points. And we find out the sufficient condition of global asymptotic stability of positive equilibrium points. Then, by using *Poincaré-Bendixson* annular region theorem and uniqueness theorem by Zhang Zhifen, we prove the sufficient condition of the unique existence of limit cycle. At last, we give out the conclusions of the numerical simulation.

Key words predator-prey system; equilibrium points; growth rate; limit cycle