第 24卷第 2期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol.24 No.2
2011年 4月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Apr. 2011
文章编号: 1673-1549(2011)02-0151-03

分数跳–扩散下信用风险中企业违约概率研究

李艳伟, 薛 红, 李 军

(西安工程大学理学院, 西安 710048)

摘 要: 假定资产价值服从分数跳–扩散过程, 利用分数布朗运动和跳过程的随机分析理论, 得到了分数跳–扩散下的企业违约概率, 并通过 Matlab软件分析了主要参数对违约概率的影响: 当影响资产价值变化的波动率 σ 固定时, 随着泊松分布的参数 λ 和 Hurst参数 H 的增大, 违约概率逐渐变大, 说明违约概率与这些参数密切相关。相比资产价值仅由分数布朗运动驱动, 该模型更加符合实际。

关键词: 分数布朗运动; 跳–扩散过程; 违约概率
中图分类号: O211.6; F224 文献标识码: A

引 言

信用风险结构范式最初可以追溯到文献[1-2]。在 Merton模型中, 假设企业违约只能发生在债券到期日。传统模型中一般都是假设企业资产价格服从几何布朗运动, 但实证研究表明, 许多资产价格的 Hurst参数 $H \neq 1/2$[3]。而分数 Brown运动所具有的自相似性、长期相依性等特征, 能更好地刻画标的资产价格的波动规律[4]。文献[5]得到了分数布朗运动下信用风险的企业违约概率。但由于公司在经营过程中会受到一些重大突发信息的影响, 资产价值会发生不连续的跳变, 所以本文假定资产价值服从分数–跳扩散过程, 讨论了企业的违约概率, 从而使模型更加切合实际。

1 预备知识

定义 1[3] 设 (Ω, F, P) 为一个完备的概率空间, $H \in (0,1)$ 为一常数。具有 Hurst参数 H 的分数布朗运动是一 Gaussian过程 $\{B_H(t)\}_{t\in R^+} = \{B_H(t,\omega);\ t\in R^+,\ \omega \in \Omega\}$, 且满足:

(1) $B_H(0) = E[B_H(t)] = 0$, 对所有 $t\in R^+$;

(2) $E[B_H(t)B_H(s)] = \frac{1}{2}\{|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\}$; $s, t\in R^+$。

这里 E 表示关于概率测度 P 的期望, $R^+ = \{s: s > 0\}$。

如果 $H = \frac{1}{2}$, 则 $B_H(t)$ 为标准布朗运动, 用 $B(t)$ 表示。

如果 $H > \frac{1}{2}$, 则 $B_H(t)$ 是持久的或有长程关联性。即

$r(n) = E\{B_H(n)[B_H(n+1) - B_H(n)]\} > 0$, 对所有 $n = 1, 2, \ldots$, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty} r(n) = \infty$。

引理 1[6] 假定 $Y_t = B_H(t) + N(t)$, $f(t,x) \in C^{1,2}(R^+\times R \to R)$, 且满足 $f(t, Y_t)$、$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, Y_s)ds$、$\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(s, Y_s)ds$、$\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(s, Y_s)s^{2H-1}ds$ 都属于 $L^2(P)$, 则

$$f(t, Y_t) = f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, Y_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, Y_s)dY_s + H\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(s, Y_s)s^{2H-1}ds + \frac{\lambda}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(s, Y_s)ds \tag{1}$$

2 金融市场模型

假设标的资产价格过程 $S(t)$, 在风险中性概率测度下, 由分数布朗运动和泊松过程共同驱动[7], 满足如下随机微分方程

$$dS(t) = S(t)[(r-\lambda\sigma)dt + \sigma(dB_H(t) + dN(t))] \tag{2}$$

其中 r 为无风险利率, $\sigma\ (\sigma > 0)$ 为波动率, $\{B_H(t), t \geqslant 0\}$ 是 Hurst参数为 H 的分数布朗运动, $N(t)$ 是参数为 λ 的泊松过程, 且 $B_H(t)$ 与 $N(t)$ 相互独立。

定理 1 资产价值所满足的随机微分方程(2)的解

收稿日期: 2011-01-21
基金项目: 陕西省自然科学基金项目(2010JM1010); 陕西省教育厅自然科学专项基金(09JK464)

作者简介: 李艳伟(1981-), 女, 山东济宁人, 硕士生, 主要从事金融数学方面的研究。

为

$$S_t = S_0 \exp\{(r - \lambda\sigma - \frac{\lambda\sigma^2}{2})t - \frac{\sigma^2}{2}t^{2H} + \sigma(B_H(t) + N(t))\} \quad (3)$$

证明　记 $f(t,x) = S_0 \exp\{(r - \lambda\sigma - \frac{\lambda\sigma^2}{2})t - \frac{\sigma^2}{2}t^{2H} + \sigma x\}$,

由引理 1,可得

$$\begin{aligned} dS_t &= df(t, B_H(t) + N(t)) \\ &= f(t,x)(r - \lambda\sigma - \frac{\lambda\sigma^2}{2} - H\sigma^2 t^{2H-1})dt \\ &+ \sigma f(t,x)dB_H(t) + \sigma f(t,x)dN(t) \\ &+ Ht^{2H-1}\sigma^2 f(t,x)dt + \frac{\lambda\sigma^2}{2}f(t,x)dt \\ &= f(t,x)(r - \lambda\sigma - \frac{\lambda\sigma^2}{2} - H\sigma^2 t^{2H-1} + H\sigma^2 t^{2H-1} \\ &+ \frac{\lambda\sigma^2}{2})dt + \sigma(dB_H(t) + dN(t)) \\ &= f(t,x)[(r - \lambda\sigma)dt + \sigma(dB_H(t) + dN(t))] \\ &= S_t[(r - \lambda\sigma)dt + \sigma(dB_H(t) + dN(t))] \end{aligned}$$

定理得证。

3　企业违约概率

在结构化模型中,违约有两种定义角度:一种是“资不抵债”,即公司资产价值不足以冲抵债务价值是造成违约或破产的根本原因;另一种是“现金流危机”,即违约是由于现金流无法满足债务支付造成的。一般情况下,结构化模型定义违约采用“资不抵债”的原则。

假设现在是 0时刻,企业只能在债券到期日 T 时刻违约,即如果在到期日 T, 企业资产价值 S_T 低于企业债券面值 L, 则企业违约,并且企业债券持有者只能接受财富数量 S_T; 反之,如果企业不违约,则债券持有者接受财富数量 L。

定理 2企业违约概率

$$p = P\{S_T < L\} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T} \Phi(-d_n),$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布,且

$$d_n = \frac{\ln S_0 - \ln L + (r - \lambda\sigma - \frac{\lambda\sigma^2}{2})T - \frac{\sigma^2 T^{2H}}{2} + n\sigma}{\sigma T^H}$$

证明　由于

$$S_T = S_0 \exp\{(r - \lambda\sigma - \frac{\lambda\sigma^2}{2})T - \frac{\sigma^2}{2}T^{2H} + \sigma(B_H(T) + N(T))\}$$

记

$$A = \{\frac{B_H(T)}{T^H} \leqslant \frac{\ln L - \ln S_0 - (r - \lambda\sigma - \frac{\lambda\sigma^2}{2})T + \frac{\sigma^2 T^{2H}}{2} - \sigma N(T)}{\sigma T^H}\}$$

$$B = \{\frac{B_H(T)}{T^H} \leqslant -d_n\}$$

则企业的违约概率

$$\begin{aligned} p &= P\{S_T < L\} = P(A) = E\{I_A\} \\ &= E\{E(I_A | N(T))\} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} E(I_A | N(T) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} E\{I_B\} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \Phi(-d_n) \end{aligned}$$

定理得证。

注 1　当 $\lambda = 0$时,则 $n = 0$, 可得分数布朗运动下的企业违约概率

$$p = \Phi(\frac{\ln l_0 - rT + \frac{\sigma^2 T^{2H}}{2}}{\sigma T^H})$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, $l_0 = \frac{L}{S_0}$ 表示企业的初始杠杆率,同文献[5]的结论。

注 2　当 $H = \frac{1}{2}$时,可得跳 - 扩散下的企业违约概率

$$p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!} \Phi(-d)$$

其中

$$d = \frac{\ln l_0 - (r - \lambda\sigma - \frac{1}{2}\lambda\sigma^2)T + \frac{\sigma^2 T}{2} - n\sigma}{\sigma\sqrt{T}}$$

注 3　当 $\lambda = 0$, $H = \frac{1}{2}$时,则 $n = 0$, 可得布朗运动下的企业违约概率

$$p = \Phi(\frac{\ln l_0 - rT + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}})$$

同文献[8]的结论。

4　实例分析

为了直观描述泊松分布的参数 λ和 Hurst参数 H 对违约概率的影响,通过一个具体的实例来看:假设企业的初始杠杆率 $l_0 = 0.85$, 无风险年利率 $r = 0.05$, 合约期 $T = 4$年,波动率 $\sigma = 0.20$, 不同的参数 λ与 Hurst参数 H 的违约概率如图 1至图 4所示。

图 1是资产价值仅由分数布朗运动驱动,得到的企业违约概率比较大。而由分数布朗运动和 Poisson过程共同驱动的资产价值在同样波动率下的企业违约概率则比较小。从图 2,图 3,图 4我们可以很直观地看出泊松分布的参数 λ和 Hurst参数 H 对违约概率的影响:在同样波动率($\sigma = 0.20$)的情况下,随着 λ的增大,违约概率越来越大;随着 Hurst参数 H 的增大,违约概率也逐渐增大。由此说明波动率 σ、泊松分布的参数 λ和 Hurst参数 H 的改变均对违约概率有较大影响。

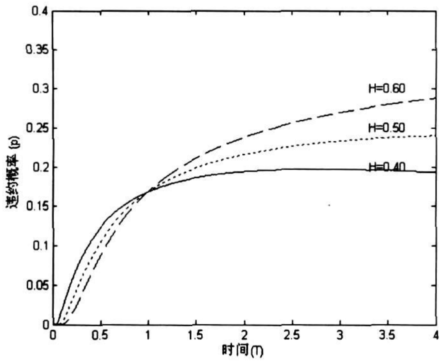

图 1　违约概率(σ = 0.20, λ = 0)

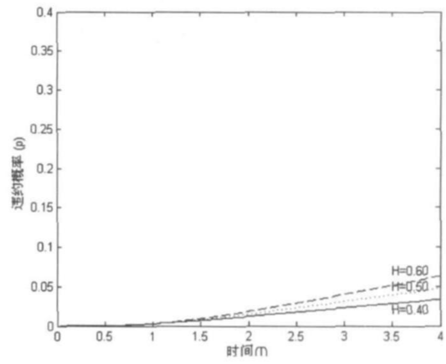

图 2　违约概率(σ = 0.20, λ = 0.10)

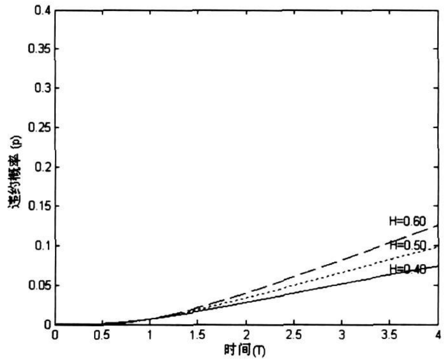

图 3　违约概率(σ = 0.20, λ = 0.20)

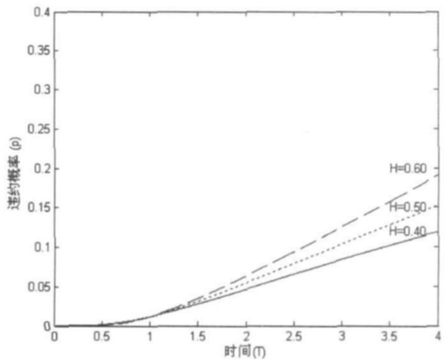

图 4　违约概率(σ = 0.20, λ = 0.30)

5　结　论

本文假设资产价值服从分数跳 - 扩散过程, 利用分数布朗运动和跳过程的随机分析理论, 得到了企业在债券到期日的违约概率。相比资产价值仅由分数布朗运动驱动要更加符合实际情况。另外, 通过 Matlab软件讨论了分数跳 - 扩散下信用风险中企业的违约概率, 并分析了主要参数对违约概率的影响。从图 1- 图 4可以很直观地看到: 波动率 σ、泊松分布的参数 λ和 Hurst参数 H 的改变对违约概率均有较大影响。

参 考 文 献:

[1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 22: 637-659.

[2] Merton Robert C. On pricing of corporate debt: the risk structure of interest rate[J]. Journal of Finance, 1974, 29: 449-470.

[3] 刘韶跃. 数学金融学的分数次 Black-Scholes模型及应用 [D]. 长沙: 湖南师范大学, 2004.

[4] 赵佃立. 分数布朗运动环境下欧式幂期权的定价 [J]. 经济数学, 2007, 24(1): 22-26.

[5] 李慧玲. 分数布朗运动下信用风险结构模型 [J]. 甘肃联合大学学报: 自然科学版, 2007, 21(5): 23-26.

[6] 孙玉东, 薛 红. 分数跳-扩散过程下强路径依赖型期权定价模型 [J]. 西安工程大学学报, 2010, 24(1): 122-127.

[7] 蔡明超, 译. 金融数学 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2004.

[8] 李慧玲. 信用风险结构模型 [D]. 西安: 西安工程大学, 2008.

Enterprise Default Probability of Credit Risk Under Fractional Jump-Diffusion Process

LI Yan-wei, XUE Hong, LI Jun

(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

Abstract　Under the hypothesis that asset value obeys the fractional jump-diffusion process, the explicit formula of enterprise default probability of credit risk by the stochastic analysis theory for the fractional Brownian motion and jump process is obtained, and the influence of main parameters on default probability by Matlab simulation is analyzed. When asset value volatility σ is fixed, the default probability becomes more and more bigger, with the increasing of Poisson distribution parameter λ and Hurst parameter H, which indicates that the default probability is related to these parameters closely. Comparing to asset value being driven only by fractional Brownian motion, this model meets the truth further.

Key words　fractional Brownian motion; jump-diffusion process; default probability