

# 随机系统的相似性及其度量

彭小智<sup>1</sup>, 马凌<sup>2</sup>, 周美立<sup>3</sup>

(1. 金陵科技学院基础部, 南京 211169; 2. 金陵科技学院商学院, 南京 211169;

3. 合肥工业大学机械学院, 合肥 230001)

**摘要:**对确定系统相似性的理论和应用研究已经取得了不少成果; 并且随着概率论与数理统计的快速发展, 其在系统工程方面的应用也有了较大的突破, 这使得仅仅研究确定性系统是不够的, 文章在利用概率论的思想给出随机系统的相关定义基础上给出随机系统相似性的定义及其度量, 并给出了实例的讨论。

**关键词:**随机系统; 随机变量; 相似性

**中图分类号:** N945. 1

**文献标识码:** A

## 引言

相似系统理论和相似学的研究成果表明, 自然界中相似性的实质是系统相似, 支配相似性的根本原理是一致的。由于系统间存在相似性, 而形成相似系统, 依据不同性质和层次等级, 可分为自然相似系统, 工程技术相似系统, 社会相似系统, 自相似系统等多种类型。比如, 相似性天体系统, 相似性生物系统, 相似性生态系统等都是自然相似系统; 行星-卫星系统同太阳系构成的相似系统, 细胞与生物体构成的相似系统, 都是自相似系统; 不同国家、不同省州、不同学校和企业结构与功能相似, 构成社会相似系统; 供水与供电相似系统, 机电相似系统等都是工程技术相似系统。一方面, 对于这类系统, 文献[1-9]已经给出了它们的相似性的定义及其度量和在机械产品设计中的应用; 史东才<sup>[10]</sup>将相似学原理引用到覆盖件工艺决策中, 建立了覆盖件工艺特征集, 依据相似学原理以及覆盖件的工艺特征集合确立了相似比较算法, 并通过实例验证了用相似学原理建立的覆盖件工艺决策方法的实用性; 章志凌<sup>[11]</sup>详细介绍了 Corpus 库的训练方法, 在此基础上, 通过构建词语的上下文关系向量提出了一种词语相似度算法, 并通过实验证明这是一种有效的对词语相似度进行计算的方法; 徐

久龄<sup>[12]</sup>研究了相似学原理对图书情报工作的重要指导意义和推动作用; 彭小智等<sup>[13]</sup>在相似关系下, 利用与总体相似的若干个总体的回归函数核估计构造了总体的回归函数的核估计, 并得到了其渐近正态性。另一方面, 随着概率统计的迅速发展与应用, 人们越来越认识到, 系统往往受到多种因素的影响, 精确的系统动态模型的建立往往是难以达到的, 故随机系统的研究越来越引起人们的注意, 本文将给出随机系统相似性的定义及其度量, 并给出了系统在指数分布描述时的计算实例。

**定义1** 若一个系统或其某些主要特征可以由随机变量(或随机过程)及其分布来描述, 则称该系统为随机系统。

例如, 许多服务系统就是随机系统, 因为此类系统的几个主要特征(顾客到达时间、顾客接受服务时间、等待人数)都可以用随机过程来描述; 电子系统、机械系统等在做系统分析时, 其寿命也常用指数分布或 weibull 分布来描述。

## 1 离散型随机系统

**定义2** 若一个系统或其某些主要特征可以由离散型随机变量来描述, 则称该系统为离散型随机系统。

在所讨论的系统均为离散型随机系统时, 我们将利

用随机变量的分布律给出某个系统相对于另外一个系统的相似性的定义。

**定义3** 假设系统A、B是两个离散型有限随机系统(即可以用取有限个可能值的随机变量描述),X、Y分别为描述它们的随机变量,分布律分别为:

$$\begin{array}{cccccccc} a_1 & a_2 & & a_{n-1} & a_n & b_1 & b_2 & & b_{m-1} & b_m \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n & q_1 & q_2 & \cdots & q_{m-1} & q_m \end{array}$$

记  $\Phi = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $\Psi = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ,  $A = \Phi \cap \Psi = \{a_{i_k}, \dots, a_{i_k}\}$ ,  $k < \min\{n, m\}$ , 若A在X、Y的分布律中对应的概率分别为  $\{p_{i_k}, \dots, p_{i_k}\}$ ,  $\{q_{j_k}, \dots, q_{j_k}\}$ , 则可以定义系统B对系统A的相似度为  $S_{BA} = \sum_{i=1}^k p_{i_k}$ , 系统A对系统B的相似度为  $S_{AB} = \sum_{j=1}^k q_{j_k}$ 。

由定义3,显然系统A与系统B的相似性应该由  $S_{AB}$  和  $S_{BA}$  共同决定,因此,我们可以给出系统A与系统B的相似性度量的模糊定义法:

**定义4** 给定常数  $\alpha > 0$  (一般取  $\alpha > 0.8$ ),则

(1)当  $S_{AB} > \alpha$  和  $S_{BA} > \alpha$  同时成立时,称系统A与系统B几乎相似。

(2)当  $S_{BA} < 1 - \alpha$ 、 $S_{AB} < 1 - \alpha$  和  $S_{BA} < 1 - \alpha$  且  $S_{AB} < 1 - \alpha$  这三种情况之一出现时,称系统A与系统B几乎不相似。

(3)当  $1 - \alpha < S_{BA} < 0.5$  且  $1 - \alpha < S_{AB} < 0.5$ , 称系统A与系统B具有一定相似性;当  $0.5 < S_{BA} < \alpha$  且  $0.5 < S_{AB} < \alpha$  称系统A与系统B较相似。

**注** (1)用概率的思想来认识随机系统的相似性,即:

①系统A与系统B几乎相似是指,系统A与系统B相似是一个发生概率很大的事件。

②系统A与系统B几乎不相似是指,系统A与系统B相似是一个发生概率很小的事件。

(2)以定义4中的方式给出随机系统的相似性,也是符合系统分析时一些分析方法的使用特点,比如,层次分析法、综合评价决策模型法等。

## 2 连续随机系统

**定义5** 若一个系统或其某些主要特征可以由连续型随机变量来描述,则称该系统为连续型随机系统。

在所讨论的系统均为连续型随机系统时,将利用随机变量的概率密度给出某个系统相对于另外一个系统的相似性的定义为。

**定义6** 假设系统A、B是两个连续型随机系统,X、Y分别为描述它们的随机变量,概率密度函数分别为

$f(x)$ 、 $g(x)$ ,其中  $x \in R$ ,而  $\mathfrak{R}$ 、 $\mathfrak{N}$  分别是  $f(x)$ 、 $g(x)$  的支撑,则可以定义系统B对系统A的相似度为  $S_{BA} = \int_{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{N}} f(x) dx$ , 系统A对系统B的相似度为  $S_{AB} = \int_{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{N}} g(x) dx$ 。

**注** 若  $\mathfrak{R} \subset R$ ,对  $\forall x \in \mathfrak{R}, f(x) > 0$ ,且  $\forall y \in R - \mathfrak{R}, f(y) = 0$ ,则称  $\mathfrak{R}$  是  $f(x)$  的支撑。

## 3 实例讨论

(1)假设系统A、B是两个离散型随机系统,X、Y分别为描述它们的随机变量,分布律为  $B(n, p_1), B(m, p_2)$ ,不是一般性,令  $n < m$ ,则  $S_{AB} = \sum_{i=1}^n C_m^n p_2^n (1 - p_2^{m-n}), S_{BA} = 1$ 。

(2)假设系统A、B是两个连续型随机系统,X、Y分别为描述它们的随机变量,概率密度函数分别为:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1(x-\mu_1)}, & x > \mu_1 \\ 0, & x \leq \mu_1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2(x-\mu_2)}, & x > \mu_2 \\ 0, & x \leq \mu_2 \end{cases}$$

不妨设  $\mu_2 > \mu_1$ ,则

$$\begin{aligned} S_{BA} &= \int_{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{N}} f(x) dx = \int_{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{N}} \lambda_1 e^{-\lambda_1(x-\mu_1)} dx = \\ &= \int_{\mu_2}^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1(x-\mu_1)} dx = \int_{\mu_2}^{+\infty} e^{-\lambda_1(x-\mu_1)} d\lambda_1(x-\mu_1) = \\ &= -e^{-\lambda_1(x-\mu_1)} \Big|_{\mu_2}^{+\infty} = e^{-\lambda_1(\mu_2-\mu_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{AB} &= \int_{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{N}} g(x) dx = \int_{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{N}} \lambda_2 e^{-\lambda_2(x-\mu_2)} dx = \\ &= \int_{\mu_2}^{+\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2(x-\mu_2)} dx = \int_{\mu_2}^{+\infty} e^{-\lambda_2(x-\mu_2)} d\lambda_2(x-\mu_2) = \\ &= -e^{-\lambda_2(x-\mu_2)} \Big|_{\mu_2}^{+\infty} = 1 \end{aligned}$$

对给定常数  $\alpha > 0$  (一般取  $\alpha > 0.8$ ),当  $S_{BA} = e^{-\lambda_1(\mu_2-\mu_1)} > \alpha$ ,即  $\mu_2 < \mu_1 - \frac{1}{\lambda_1} \ln \alpha$  时,系统A与系统B几乎相似;当  $S_{BA} = e^{-\lambda_1(\mu_2-\mu_1)} < 1 - \alpha$ ,即  $\mu_2 > \mu_1 - \frac{1}{\lambda_1} \ln(1-\alpha)$  时,系统A与系统B几乎不相似。

## 参考文献:

- [1] Zhou Meili. Principles and practice of similarity system theory [J]. International Journal of General Systems, 1994, 23(1): 39-48.

- [2] 周美立. 相似系统论 [M]. 北京: 科学技术文献出版社, 1994.
- [3] 周美立. 相似学 [M]. 北京: 中国科学技术出版社, 1993.
- [4] 周美立. 相似系统探讨 [J]. 系统工程理论与实践, 1991, 11(6): 51-541.
- [5] Zhou Meili. Some concepts and mathematical consideration of similarity system theory [J]. Journal of Systems Science and Systems Engineering, 1992, 1(1): 84-98.
- [6] Zhou Meili. Formation principles of similar systems [J]. Journal of System Science and System Engineering, 1996, 5(3): 281-286.
- [7] 周美立, 王浣尘. 机械系统相似分析与度量 [J]. 中国机械工程, 1996, 7(6): 56-58.
- [8] 周美立. 相似机电产品系统杂交集成设计 [J]. 机械工程学报, 2002, 38(4): 96-99.
- [9] 周美立. 汽车系统单元化集成设计中相似性与复杂性 [J]. 汽车工程, 2004, 26(6): 735-738.
- [10] 史东才. 基于经验知识的计算机辅助覆盖件冲压工艺决策 [J]. 塑性工程学报, 2005, 12(3): 56-59.
- [11] 章志凌. 基于 Corpus 库的词语相似度计算方法 [J]. 计算机应用, 2006, 26(3): 638-640.
- [12] 徐久龄. 网络环境下相似学原理研究意义 [J]. 情报资料工作, 2003, 2: 18-19.
- [13] 彭小智, 周美立, 凌能祥. 相似系统下非参数回归函数估计 [J]. 统计与决策, 2007, 7: 29-30.

## Similarity and Measure of Random System

PENG Xiao-zhi<sup>1</sup>, MA Ling<sup>2</sup>, ZHOU Mei-ti<sup>3</sup>

(1. Department of Basic Courses, Jinling Institute of Technology, Nanjing 211169, China;

2. Business School, Jinling Institute of Technology, Nanjing 211169, China;

3. School of Mechanical and Automotive Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230001, China)

**Abstract:** On the one hand, many results have been achieved in research of theory and application of similarity of determined systems. On the other hand, with the rapid development of probability and statistics, its application in systems engineering has also been a major breakthrough, So it is not enough for use only to study the determined systems. By using the idea of probability to give out the definition of random system will be the first problem of this article. Furthermore, both definition and its measure of random system, s similarity will be given out, an example is discussed as well.

**Key words:** random system; random variable; similarity