第 24卷第 1期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol.24 No.1
2011年 2月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Feb. 2011
文章编号: 1673-1549(2011)01-0048-03

M -矩阵的 Hadamard积的最小特征值下界估计

蒋建新, 李艳艳

(文山学院数理系, 云南 文山 663000)

摘 要: 文章给出了非奇异 M -矩阵 A 与非奇异 M -矩阵 B 的逆矩阵的 Hadamard积的最小特征值下界的估计式。示例表明, 文中所得估计式在某些情况下可得到比现有估计式更为精确的结果。

关键词: M -矩阵; Hadamard积; Perron向量; 最小特征值

中图分类号: O151.21 文献标识码: A

1 预备知识

记 N 表示正整数集合, $C^{n\times n}$ ($R^{n\times n}$)表示 $n\times n$ 复(实)矩阵集合。

定义 1[1] 设 $Z^{n\times n}=\{A=(a_{ij})\in R^{n\times n}: a_{ij}\leqslant 0, i\neq j\}$, 则称 $Z^{n\times n}$ 的矩阵 A 为 Z 矩阵(简记为 $A\in Z^{n\times n}$)。

定义 2[1] 若 $A=(a_{ij})\in Z^{n\times n}$, 则 A 可表示为 $A=\alpha I-P$, 其中 $P\geqslant 0$, 当 $\alpha\geqslant\rho(P)$ 时, 称 A 为 M -矩阵。特别的, 当 $\alpha>\rho(P)$ 时, 称 A 为非奇异 M -矩阵; 当 $\alpha=\rho(P)$ 时, 称 A 为奇异 M -矩阵。我们用 M_n 表示非奇异 M -矩阵的集合。

定义 3[1] 设 $A=(a_{ij})\in Z^{n\times n}$, 记 $\tau(A)=\min\{\mathrm{Re}(\lambda): \lambda\in\sigma(A)\}$ ($\sigma(A)$ 表示 A 的谱), $\tau(A)$ 称为 A 的最小特征值。

引理 1[1] 设 $A\in M_n$, 则 $\rho(A^{-1})$ 是非负矩阵 A^{-1} 的 Perron特征值, 则 $\tau(A)=\dfrac{1}{\rho(A^{-1})}>0$。

引理 2[1] 设 $A=(a_{ij})\in M_n$, 则存在正向量 u 和 v 使得 $Au=\tau(A)u$, $v^TA=\tau(A)v^T$, u 和 v 分别称为 A 的右 perron向量和左 perron向量。

定义 4[1] 设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$, $B=(b_{ij})\in C^{m\times n}$。用 $A\circ B$ 表示 A 和 B 的对应元素相乘而成的 $m\times n$ 矩阵

$$A\circ B=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1}b_{m1} & \cdots & a_{mn}b_{mn}\end{pmatrix}$$

$A\circ B$ 称为 A 和 B 的 Hadamard积。

引理 3[1] 若 $A, B\in M_n$, 则 $A\circ B^{-1}$ 仍为 M -矩阵。

引理 4[2] 设 $P\in M_n$ 且不可约, 对于非负非零向量 z, 若 $pz\geqslant kz$, 则 $\tau(p)\geqslant k$。

引理 5[3] 设 n 阶矩阵 $A\geqslant 0$, 则下列结论之一成立,

(1) A 不可约。

(2)存在置换矩阵 P 使得

$$P^TAP=\begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1k}\\ & A_2 & \cdots & A_{2k}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & A_k\end{pmatrix} \quad (1)$$

其中 A_i 不可约, $i=1,\cdots,k$。

引理 6[3] 设 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 如果 A 有形如(1)式的不可约标准形, 则 $\sigma(A)=\bigcup_{i=1}^{k}\sigma(A_i)$ $\tau(A)=\min\{\tau(A_i): i=1,\cdots,k\}$。

引理 7[4] 设 $A\in M_n$, 若 $A_k\in M_k$ 且是 A 的主子矩阵, 则 $\tau(A_k)\geqslant\tau(A)$。

2 主要结果

定理 1 设 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in M_n$, $B^{-1}=(\beta_{ij})$。则

$$\tau(A\circ B^{-1})\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_{ii}\beta_{ii}-(\rho(B^{-1})-\beta_{ii})(a_{ii}-\tau(A))\} \quad (2)$$

证明 当 $n=1$ 时, (2)式成立。假设 $n\geqslant 2$, 分两种情况:

(1)若 A, B 不可约, 因为 $A, B\in M_n$, 则 $B^{-1}>0$ 且

收稿日期: 2010-09-02

作者简介: 蒋建新(1981-), 男, 甘肃天水人, 助教, 主要从事微分方程理论及其应用方面的研究。

$A\circ B^{-1}$不可约。

设 $u=(u_i)>0$, $v=(v_i)>0$分别是A和 $(B^{-1})^T$的右 perron向量,则 $Au=\tau(A)u$, $(B^{-1})^Tv=\rho(B^{-1})v$。即 $a_{ii}u_i+\sum_{j\neq i}a_{ij}u_j=\tau(A)u_i$, 则 $a_{ii}u_i-\sum_{j\neq i}|a_{ij}|u_j=\tau(A)u_i$, $i\in N$。$v_j\beta_{jj}+\sum_{i\neq j}v_i\beta_{ij}=\rho(B^{-1})v_j$, 则 $\sum_{i\neq j}v_i\beta_{ij}=\rho(B^{-1})v_j-v_j\beta_{jj}$, $j\in N$。所以 $\beta_{ij}\leqslant\frac{\rho(B^{-1})v_j-v_j\beta_{jj}}{v_i}$。令 $z_i=\frac{u_i}{[\rho(B^{-1})-\beta_{ii}]v_i}$, $C=A\circ B^{-1}=(c_{ij})\in M_n$。

$$(Cz)_i=a_{ii}\beta_{ii}z_i-\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\beta_{ij}z_j\geqslant$$
$$a_{ii}\beta_{ii}z_i-\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\frac{(\rho(B^{-1})-\beta_{jj})v_j}{v_i}\frac{u}{(\rho(B^{-1})-\beta_{jj}v_j)}=$$
$$a_{ii}\beta_{ii}z_i-\frac{1}{v_i}\sum_{j\neq i}|a_{ij}|u_j=$$
$$a_{ii}\beta_{ii}z_i-\frac{[\rho(B^{-1})-\beta_{ii}]z_i}{u_i}(a_{ii}-\tau(A))u_i=$$
$$a_{ii}\beta_{ii}z_i-(\rho(B^{-1})-\beta_{ii})(a_{ii}-\tau(A))z_i=$$
$$[a_{ii}\beta_{ii}-(\rho(B^{-1})-\beta_{ii})(a_{ii}-\tau(A))]z_i$$

由引理 4知

$$\tau(A\circ B^{-1})\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_{ii}\beta_{ii}-(\rho(B^{-1})-\beta_{ii})(a_{ii}-\tau(A))\}$$

(2)若 $A\circ B^{-1}$可约,令 $D=A\circ B^{-1}$,由引理 5知存在置换矩阵 P使

$$P^TDP=\begin{pmatrix} D_1 & D_{12} & \cdots & D_{1k} \\ & D_2 & \cdots & D_{2k} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & D_k \end{pmatrix}$$

$D_i=A_i\circ B_i^{-1}$不可约, $i=1,2,\dots,k$, $\tau(A\circ B^{-1})=\min\{\tau(D_i)=\tau(A_i\circ B_i^{-1}): i=1,\dots,k\}$所以定理 1成立。

在定理 1中当 $A=B$时,下面推论成立。

推论 1 设 $A=(a_{ij})\in M_n$, $A^{-1}=(\alpha_{ij})\in R^{n\times n}$,则

$$\tau(A\circ A^{-1})\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\begin{array}{l} a_{ii}\alpha_{ii}-(\rho(A^{-1})-\alpha_{ii}) \\ (a_{ii}-\tau(A)) \end{array}\right\}。$$

注 若

$$a_{ii}\beta_{ii}-(\rho(B^{-1})-\beta_{ii})(a_{ii}-\tau(A))-\tau(A)\beta_{ii}=$$
$$2a_{ii}\beta_{ii}-2\beta_{ii}\tau(A)-\rho(B^{-1})(a_{ii}-\tau(A))=$$
$$(a_{ii}-\tau(A))(2\beta_{ii}-\rho(B^{-1}))\geqslant 0$$

所以,当 $\beta_{ii}\geqslant\frac{\rho(B^{-1})}{2}$时,本文的结果提高了文献[3]中的界 $\tau(A)\beta_{ii}$。

引理 8[1] 设对角矩阵 $A,B,C,D\in C^{n\times n}$,则

$$D(A\circ B)E=(DAE)\circ B=(DA)\circ(BE)=(AE)\circ(DB)=A\circ(DBE)$$

引理 9[5] 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,则 A的特征值位于区域:

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{z\in C: |z-a_{ii}||z-a_{jj}|\leqslant[\sum_{k\neq i}|a_{ik}|][\sum_{k\neq j}|a_{jk}|]\}$$

定理 2 设

$$A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in M_n, B^{-1}=(\beta_{ij})\in R^{n\times n}$$

则

$$\tau(A\circ B^{-1})\geqslant\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} a_{ii}\beta_{ii}+a_{jj}\beta_{jj}-[(a_{ii}\beta_{ii}-a_{jj}\beta_{jj})^2 \\ +4(a_{ii}-\tau(A))(\rho(B^{-1})-\beta_{ii})(a_{jj} \\ -\tau(A))(\rho(B^{-1})-\beta_{jj})] \end{array}\right\}$$

证明 分两种情况证明。

(1)若 A,B不可约,则 $B^{-1}>0$,所以 $A\circ B^{-1}$也不可约。

因为 $\rho(B^{-1})-\beta_{ii}>0$, $i\in N$, $a_{ii}-\tau(A)>0$, $i\in N$。又因为 $A=(a_{ij})\in M_n$且不可约, $B^{-1}=(\beta_{ij})>0$。则存在正向量 u, v使 $Au=\tau(A)u$, $B^{-1}v=\rho(B^{-1})v$。即

$$a_{ii}-\sum_{j\neq i}\frac{|a_{ij}|u_j}{u_i}=\tau(A)$$

$$\beta_{ii}+\sum_{j\neq i}\frac{\beta_{ij}v_j}{v_i}=\rho(B^{-1})$$

定义 $\tilde U=diag(U_1,\dots,U_n)$, $\tilde V=diag(V_1,\dots,V_n)$,则 $\tilde U$, $\tilde V$是非奇异对角矩阵。

$$\tilde A=(\tilde a_{ij})=\tilde U^{-1}A\tilde U=$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{11}u_2}{u_1} & \cdots & \frac{a_{1n}u_n}{u_1} \\ \frac{a_{21}u_1}{u_2} & a_{22} & \cdots & \frac{a_{2n}u_n}{u_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{n1}u_1}{u_n} & \frac{a_{n2}u_2}{u_n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\tilde B=(\tilde\beta_{ij})=\tilde V^{-1}B^{-1}\tilde V=$$
$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \frac{\beta_{12}v_2}{v_1} & \cdots & \frac{\beta_{1n}v_n}{v_1} \\ \frac{\beta_{21}v_1}{v_2} & \beta_{22} & \cdots & \frac{\beta_{2n}v_n}{v_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\beta_{n1}v_1}{v_n} & \frac{\beta_{n2}v_2}{v_n} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

则 $\tilde A$是非奇异 M矩阵, $\tilde B$是正矩阵。令 $\tilde W=\tilde V\tilde U$,则 $\tilde W$非奇异,则由引理 8知,

$$(\tilde V\tilde U)^{-1}(A\circ B^{-1})(\tilde V\tilde U)=$$
$$(\tilde U^{-1}A\tilde U)\circ(\tilde V^{-1}B^{-1}\tilde V)=(\tilde A\circ\tilde B)$$

则 $\tau(\tilde A\circ\tilde B)=\tau(A\circ B^{-1})$。令 $\tau(\tilde A\circ\tilde B)=\lambda$,且 $\lambda\in\sigma(\tilde A\circ\tilde B)$。由引理 9知

$$|\lambda - a_{ii}\beta_{ii}||\lambda - a_{jj}\beta_{jj}| \leqslant \sum_{k\neq i}|\tilde{a}_{ik}\tilde{\beta}_{ik}|\sum_{k\neq j}|\tilde{a}_{jk}\tilde{\beta}_{jk}|$$

则

$$|(\lambda - a_{ii}\beta_{ii})(\lambda - a_{jj}\beta_{jj})| \leqslant$$

$$\sum_{k\neq i}\frac{|a_{ik}|u_k}{u_i}\sum_{k\neq i}\frac{\beta_{ik}v_k}{v_i}\sum_{k\neq j}\frac{|a_{jk}|u_k}{u_j}\sum_{k\neq j}\frac{\beta_{jk}v_k}{v_j} =$$

$$(a_{ii} - \tau(A))(\rho(B^{-1}) - \beta_{ii})(a_{jj} - \tau(A))(\rho(B^{-1}) - \beta_{jj})$$

因为 $0 < \lambda < a_{ii}\beta_{ii}$, 则

$$(\lambda - a_{ii}\beta_{ii})(\lambda - a_{jj}\beta_{jj}) \leqslant$$

$$(a_{ii} - \tau(A))(\rho(B^{-1}) - \beta_{ii})(a_{jj} - \tau(A))(\rho(B^{-1}) - \beta_{jj})$$

即

$$\lambda \geqslant \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} a_{ii}\beta_{ii} + a_{jj}\beta_{jj} - [(a_{ii}\beta_{ii} - a_{jj}\beta_{jj})^2 \\ + 4(a_{ii} - \tau(A))(\rho(B^{-1}) - \beta_{ii}) \\ (a_{jj} - \tau(A))(\rho(B^{-1}) - \beta_{jj})] \end{array}\right\}$$

$$\tau(A\circ B^{-1}) \geqslant \min_{i\neq j}\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} a_{ii}\beta_{ii} + a_{jj}\beta_{jj} - [(a_{ii}\beta_{ii} - a_{jj}\beta_{jj})^2 \\ + 4(a_{ii} - \tau(A))(\rho(B^{-1}) - \beta_{ii}) \\ (a_{jj} - \tau(A))(\rho(B^{-1}) - \beta_{jj})] \end{array}\right\}$$

(2)类似于定理1情况(2)的证明, 当 $A\circ B^{-1}$ 可约时, 定理2仍然成立。

3 数值算例

例1 令 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$。

应用文献[1]中的结果, 则 $\tau(A\circ B^{-1}) \geqslant \tau(A)\min_{1\leqslant i\leqslant n}\beta_{ii} = \frac{1}{2}$。应用本文的定理1, $\tau(A\circ B^{-1}) \geqslant \frac{2}{3}$。事实上, $\tau(A\circ B^{-1}) = \frac{2}{3}$。$A = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}$。

应用文献[1]中的结果得 $\tau(A\circ B^{-1}) \geqslant 0.4445$。

应用文献[6]中的结果

$$\tau(A\circ B^{-1}) \geqslant \frac{1 - \rho(J_A)\rho(J_B)}{1 + \rho^2(J_B)}\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{a_{ii}}{b_{ii}} = 0.5923$$

应用本文的定理1, 得 $\tau(A\circ B^{-1}) \geqslant 0.6113$。

事实上, $\tau(A\circ B^{-1}) = 0.6275$。

例2 令 $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$。

应用文献[1]中的结果得, $\tau(A\circ B^{1}) \geqslant 0.6$。

应用文献[6]中的结果得, $\tau(A\circ B^{-1}) \geqslant 0.1369$。

应用本文的定理1,定理2分别得, $\tau(A\circ B^{-1}) \geqslant 0.8$, $\tau(A\circ B^{-1}) \geqslant 0.88335$。

事实上, $\tau(A\circ B^{-1}) = 0.8835$。

参考文献:

[1] 陈景良,陈向晖. 特殊矩阵[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.

[2] 黄廷祝, 杨传胜. 特殊矩阵分析及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[3] Horn R A, Johnson C R. Topics in Matrix Analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 1985.

[4] Berman A, Plemmons R J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences[M]. New York: Academic Press, 1979.

[5] Richard S Varga. Gersgorin and His Circles[M]. New York: Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2004.

[6] Huang Rong. Some inequalities for the Hadamard product and Fan product of matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2008(428): 1551-1559.

Some Lower Bounds for Minimum Eigenvalue of Hadamard Product of M-matrix and Inverse of M-matrix

JIANG Jian-xing, LI Yan-yan

(School of Mathematics and Physics, Wenshan University, Wenshan 663000, China)

Abstract Some new lower bounds of the minimum eigenvalue of Hadamard product $A\circ B^{-1}$ for M-matrix A and the inverse of M-matrix B are given. The given numerical examples show that estimating formules of the bounds are better than seversl known estimating formulas.

Key words M-matrix; Hadamard product; Perron vector; minimum eigenvalue