第 24卷第 1期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol 24 No. 1
2011年 2月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Feb. 2011
文章编号: 1673-1549(2011)01-0051-03

基于跳扩散分数布朗运动的脆弱欧式期权定价

黄玲君, 周圣武, 陈春香

(中国矿业大学理学院, 江苏 徐州 221116)

摘 要: 文章研究基于分数布朗运动的脆弱欧式股票期权定价问题。在股票价格服从分数跳－扩散过程, 公司价值服从分数布朗运动, 公司负债为常数的条件下, 应用风险中性定价原理, 导出了脆弱欧式股票期权的定价公式。

关键词: 跳－扩散过程; 脆弱期权; 分数布朗运动; 定价

中图分类号: F830.9; O211.6　　文献标识码: A

股票期权作为股票的一种衍生产品, 其定价问题一直是金融数学和金融工程学研究的核心问题之一。脆弱期权是指在场外市场(OTC)上交易的含有信用风险的期权。在以往的期权定价研究中, 人们普遍假设资产价格服从几何布朗运动, 它是一个连续的随机过程。而在金融市场上, 一些新的重要信息的到达会刺激股票价格发生不连续的跳跃。因此股票价格过程应包含连续扩散过程和不连续的跳跃过程两个方面。在几何布朗运动下, 资产价格变化是相互独立的随机变量, 资产收益率服从正态分布。但是近年来大量的研究表明, 资产收益率的分布具有“尖峰厚尾”的特征, 股价变化也不是随机游走, 而是呈现不同程度的长期相关性。分数布朗运动[1]恰好具有这些优点。因此用分数布朗运动来刻画资产价格的变化, 更符合市场的实际状况。自引入分数布朗运动以来, 国内外出现了大量的相关研究。Necula[2]研究了分数布朗运动环境下的期权定价。Rogers[3]讨论了分数布朗运动条件下的套期保值, 冯德育[4]给出了分数布朗运动条件下回望期权的定价公式, 赵巍[5]给出了股价受分数布朗运动驱动的混合期权定价模型。

1 模型的建立

1.1 市场模型

假设公司资产的市场价值为 V_t, 股票价格 S_t, 在期权有效期内, 公司的负债为常数 D。设 B 为公司在 t 时刻承诺到 T 支付给债权人的金额。在期权到期日 T, 若 $V_T \geqslant D$, 则不发生违约, 公司的债权人可以得到金额 B; 若 $V_T < D$, 则发生违约, 债权人得不到 B 而只能得到它的一个比例 $\frac{(1-\alpha)V_T}{D}$, 即清偿额为 $\frac{B(1-\alpha)V_T}{D}$ $(0<\alpha<1)$, 其中 αV_T 是破产成本。在到期日 T 时刻, 公司的实际支付金额 B^* 在风险中性概率测度 Q 下可表示为

$$B^* = E^*[B \mid V_T \geqslant D] + E^*\left[\frac{B(1-\alpha)V_T}{D} \mid V_T < D\right] \tag{1}$$

其中, E^* 表示风险中性概率测度 Q 下的数学期望。

1.2 基本假设

(1)假设在风险中性概率测度下, 股票价格 S_t 和公司价值 V_t 分别服从分数跳－扩散过程和分数布朗运动, 即 S_t 和 V_t 分别满足随机微分方程

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r-\lambda k)dt + \sigma_S dW_S^H(t) + U dq_t \tag{2}$$

$$\frac{dV_t}{V_t} = r dt + \sigma_V dW_V^H(t) \tag{3}$$

其中, 常数 r 是无风险利率, $\lambda(\lambda>0)$ 是跳跃强度, 表示在一年中股票价格的平均跳跃次数, q_t 是一个强度为 λ 的标准 Poisson 计数过程, U 是描述跳跃幅度的独立同分布的随机变量。$k=E(U)$, dq_t 是描述 S_t 发生跳的点过程。当股票价格发生跳时 $dq_t=1$, 否则 $dq_t=0$; 常数 σ_V, σ_S 分别为 V_t, S_t 的瞬时波动率, $W_S^H(t)$, $W_V^H(t)$ 均为

收稿日期: 2010-10-18
基金项目: 中央高校基本科研业务费专项基金(2010LKSZ03)
作者简介: 黄玲君(1984-), 女, 安徽宿州人, 硕士, 主要从事金融数学方面的研究。

具有参数 H 的分数布朗运动, 且 S_t 与 V_t 的相关系数为 ρ, $\left(W_S^H, W_V^H\right)$ 为二维正态过程。

(2)在期权有效期内标的股票无红利支付。

(3)不存在交易费用。

(4)不存在无风险套利机会。

2 基于分数布朗运动的脆弱欧式股票期权定价

当 $B = 1$时, 方程(1)可被用来给一个零息票债券进行定价。以下令 $B = 1$, 当信用风险存在时, 脆弱欧式股票看涨期权在 t时刻的价值 C_t^d 是 T 时刻现金流条件期望的贴现值, 即

$$C_t^d = e^{-r(T-t)} E^* [\max(S_T - K, 0)([1 | V_T \geqslant D] + [\frac{(1-\alpha)V_T}{D} | V_T < D])] \tag{4}$$

其中, E^* 表示风险中性概率测度 Q 下的数学期望, K 是标的股票的到期日的执行价格。

为计算方便, 记 $\delta_T = \frac{V_T}{D}$。

定理 1 股票价格 S_t 满足方程(2)、公司价值 V_t 满足方程(3)、公司负债为常数 D, 执行价格为 K, $\delta_t = \frac{V_t}{D}$ 的脆弱欧式股票看涨期权, 在到期日 T 承诺支付的金额为 $C_T^d = \max(S_T - K, 0)$, 而出现违约或破产时的实际支付金额为 $C_T^d = (1-\alpha)\delta_T\max(S_T - K, 0)$, 则该期权在 t 时刻的价值为

$$C_t^d = e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n e^{-\lambda\tau}}{n!} [S_t e^{(r-\lambda k)\tau} M(a_1, a_2, \rho) - KM(b_1, b_2, \rho) + S_t(1-\alpha)\delta_t e^{(2r-\lambda k)\tau + \rho\sigma_S\sigma_V(T^{2H}-t^{2H})} M(c_1, c_2, -\rho) - K(1-\alpha)\delta_t e^{(r-\lambda k)\tau} M(d_1, d_2, -\rho)] \tag{5}$$

其中, M 为二维正态累积分布函数, $\tau = T - t$。

$$a_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r-\lambda k)\tau + \frac{1}{2}\sigma_S^2(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_S\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

$$a_2 = -\frac{\ln(\frac{V_t}{D}) + (r-\lambda k)\tau + (\rho\sigma_S\sigma_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_V\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

$$b_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r-\lambda k)\tau - \frac{1}{2}\sigma_S^2(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_S\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

$$b_2 = \frac{\ln(\frac{V_t}{D}) + (r-\lambda k)\tau - \frac{1}{2}\sigma_V^2(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_V\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

$$c_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r-\lambda k)\tau + (\rho\sigma_S\sigma_V + \frac{1}{2}\sigma_S^2)(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_S\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

$$c_2 = -\frac{\ln(\frac{V_t}{D}) + (r-\lambda k)\tau + (\rho\sigma_S\sigma_V + \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_V\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r-\lambda k)\tau + (\rho\sigma_S\sigma_V - \frac{1}{2}\sigma_S^2)(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_S\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

$$d_2 = -\frac{\ln(\frac{V_t}{D}) + (r-\lambda k)\tau + \frac{1}{2}\sigma_V^2(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_V\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

证明 脆弱欧式股票看涨期权的价格 C_t^d 由方程(1)给出, 对其计算, 则

$$C_t^d = e^{-r\tau}E^*\left[(S_T - K)^+\left([1 | V_T \geqslant D] + [\frac{(1-\alpha)V_T}{D} | V_T < D]\right)\right] =$$

$$e^{-r\tau}E^*\left\{E^*\left[(S_T - K)^+\left([1 | V_T \geqslant D] + [\frac{(1-\alpha)V_T}{D} | V_T < D]\right) \Big| q_\tau\right]\right\} =$$

$$e^{-r\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^n e^{-\lambda\tau}}{n!}(E_1 - E_2 + E_3 - E_4) \tag{6}$$

其中

$$E_1 = E^*[S_T | S_T \geqslant K, V_T \geqslant D, q_\tau = n]$$

$$E_2 = E^*[K | S_T \geqslant K, V_T \geqslant D, q_\tau = n]$$

$$E_3 = E^*[S_T(1-\alpha)\delta_T | S_T \geqslant K, V_T < D, q_\tau = n]$$

$$E_4 = E^*[K(1-\alpha)\delta_T | S_T \geqslant K, V_T < D, q_\tau = n]$$

定理 1即要证明方程(5)与方程(6)等价。应用 $It\hat{o}$ 公式[6]对方程(2)、方程(3)分别求解, 可得

$$S_T = S_t e^{(r-\lambda k)\tau - \frac{1}{2}\sigma_S^2(T^{2H} - t^{2H}) + \sigma_S\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}Z_1 + \sum_{n=0}^{q_\tau}\ln(1+U_n)}$$

$$V_T = V_t e r^{(T-t) - \frac{1}{2}\sigma_V^2(T^{2H} - t^{2H}) + \sigma_V\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}Z_2}$$

其中

$$Z_1 = \frac{W_S^H(T) - W_S^H(t)}{\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}},\ Z_2 = \frac{W_V^H(T) - W_V^H(t)}{\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

$$Z_1 \sim N(0, 1),\ Z_2 \sim N(0, 1)$$

由假设可知 $(Z_1, Z_2) \sim M(0, 0, 1, 1, \rho)$。只计算第一个数学期望 E_1,

$$E_1 = E^*[S_T | S_T \geqslant K, V_T \geqslant D, q_\tau = n] =$$

$$S_t e^{(r-\lambda k)\tau}\int_{-b_1}^{\infty}\int_{-b_2}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2^2}{2(1-\rho^2)} + \sigma_S\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}z_1 - \frac{1}{2}\sigma_S^2(T^{2H} - t^{2H})}dz_1 dz_2$$

令 $u = z_1 - \sigma_S\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}$, $v = z_2 - \rho\sigma_S\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}$, 则

$$E_1 = S_t e^{(r-\lambda k)\tau}\int_{-a_1}^{\infty}\int_{-a_2}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{u^2 - 2\rho uv + v^2}{2(1-\rho^2)} + r(T-t)}dudv$$

再令 $x = -u$, $y = -v$, 则

$$E_1 = S_t e^{(r-\lambda k)\tau}\int_{-\infty}^{a_1}\int_{-\infty}^{a_2}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}}dxdy =$$

$$S_t e^{(r-\lambda k)\tau}M(a_1, a_2, \rho)$$

用同样的方法, 可以得到第二、三、四个数学期望分别为

$$E_2 = KM(b_1, b_2, \rho)$$

$$E_3 = S_t(1-\alpha)\delta_t e^{\rho\sigma_S\sigma_V(T^{2H}-t^{2H})+(2r-\lambda k)\tau}M(c_1, c_2, -\rho)$$

$$E_4 = K(1-\alpha)\delta_t e^{(r-\lambda k)\tau}M(d_1, d_2, -\rho)$$

将 E_1, E_2, E_3, E_4代入方程(6),即可得到方程(5),则定理 1得证。

应用定理 1和风险中性定价原理,以及关系式 $C_T^d - P_T^d = S_T - K$, 可以得到脆弱欧式股票看跌期权的定价公式。

定理 2 股票价格 S_t 满足方程(2)、公司价值 V_t 满足方程(3)、公司负债为常数 D, 执行价格为 K, $\delta_t = \frac{V_t}{D}$ 的脆弱欧式股票看跌期权,若在到期日 T 承诺支付的金额为 $P_T^d = \max(K - S_T, 0)$, 而出现违约或破产时的实际支付金额为 $P_T^d = (1-\alpha)\delta_T \max(K - S_T, 0)$, 则该期权在 t时刻的价值为

$$P_t^d = e^{-r\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^n e^{-\lambda\tau}}{n!}[KM(-b_1, b_2, -\rho) - S_t e^{(r-\lambda k)\tau}M(-a_1, a_2, -\rho) + K(1-\alpha)\delta_t e^{(r-\lambda k)\tau} M(-d_1, d_2, \rho) - S_t(1-\alpha)\delta_t e^{(2r-\lambda k)\tau+\rho\sigma_S\sigma_V(T^{2H}-t^{2H})} M(-c_1, c_2, \rho)] \tag{7}$$

其中各参数与定理 1相同。

3 结 论

本文在标的股票价格服从分数跳－扩散过程,公司价值服从分数布朗运动,公司负债为常数的条件下,应用风险中性定价原理研究了一类脆弱欧式股票期权的定价问题,并给出了脆弱欧式股票看涨期权和看跌期权的定价公式。容易看出当参数 $H = \frac{1}{2}$ 时,分数布朗运动即为标准的几何布朗运动。因此分数布朗运动富含了标准布朗运动的特征,并且应用更为广泛,则在这种假设下,研究脆弱欧式期权的定价更有实际意义。

参 考 文 献:

[1] 谢和平. 分形应用中的数学基础与方法[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

[2] Ciprian Necula. Option pricing in a fractional Brownian motion enviromment[J]. Pure Mathematics, 2002, 2(1): 63-68.

[3] Rogers L C G. Arbitrage with fractional Brownian motion[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(1): 95-105.

[4] 冯德育. 分数布朗运动条件下回望期权的定价研究[J]. 北方工业大学学报, 2009, 21(1): 67-72.

[5] 赵巍. 股价受分数布朗运动驱动的混合期权定价模型[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2010, 33(1): 6-10.

[6] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

Pricing of Vulnerable European Options with Stock Price Following Fractional Brownian Motion and Jump Diffusion Process

HUANG Ling-jun, ZHOU Sheng-wu, CHENG Chun-xiang

(College of Science, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

Abstract In this paper Fractional Brownian Motion model is employed to price the Vulnerable European stock Options. Under the hypothesis of stock price submitted to Fractional Jump Diffusion Process, corporation value submitted to Fractional Brownian Motion, and Corporation debt is a constant, by using the risk neutral valuation principle, the pricing formulae of Vulnerable European stock Options is obtained.

Key words Jump-Diffusion Process; Vulnerable Options; Fractional Brownian Motion; pricing