第 24卷第 1期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol.24　No.1
2011年 2月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Feb.2011
文章编号: 1673-1549(2011)01-0038-03

集值向量变分不等式组的数量化方法

明国芬

(西华师范大学数学与信息学院, 四川　南充　637002)

摘　要: 文章定义了四种集值变分不等式组,即分别具有强解和弱解的集值向量变分不等式组和集值数量化变分不等式组。通过运用 Konnov的数量化方法,研究将一个集值向量变分不等式组转化为一个集值数量化变分不等式组,并给出了两种集值变分不等式组的等价条件。

关键词: 数量化方法; 集值向量变分不等式组; Kneser极大极小值定理; 弱* 紧

中图分类号: O177.91　　文献标识码: A

在研究向量变分不等式时, 很多作者[1-5]都将其重心集中在将向量变分不等式的强解和弱解转化为数量化变分不等式的强解和弱解问题。本文考虑集值向量变分不等式组, 运用 konnov的数量化方法[1], 考察其与相应的集值数量化变分不等式组的关系, 以及它们自身强解和弱解的关系。

1　预备知识

设 X 是一实 *Banach* 空间, X' 是 X 的共轭空间。任意 $f\in X'$, $<f, x>$ 表示 f 在 $x\in X$ 的值。$Y_1=R^m$, $Y_2=R^n$ 是二有限维 *Euclid* 空间, $C_1=R^m_+$, $C_2=R^n_+$ 分别是定义在 Y_1, Y_2 上的偏序。K_1, $K_2\subseteq X$ 是二非空闭凸子集。令 $E=K_1\times K_2$, $L(X, Y)$ 是 X 到 Y 的所有连续线性算子所组成的空间。映射 $T: E\to 2^{L(X, Y_1)}$, $S: E\to 2^{L(X, Y_2)}$, 是从 E 分别到线性连续算子空间 $L(X, Y_1)$, $L(X, Y_2)$ 的集值映射。

定义 1　集值强向量变分不等式组, 即找到 $\xi^*=(x^*, y^*)\in E$, $\exists t^*\in T(\xi^*)$, $s^*\in S(\xi^*)$:

$$\begin{cases} t^*(x-x^*)\notin -\operatorname{int}C_1 \\ s^*(y-y^*)\notin -\operatorname{int}C_2 \end{cases} \forall \xi=(x, y)\in E \tag{1}$$

定义 2　集值弱向量变分不等式组, 即找到 $\xi^*=(x^*, y^*)\in E$, $\forall\xi=(x, y)\in E$, $\exists t^*(\xi)\in T(\xi^*)$, $s^*(\xi)\in S(\xi^*)$:

$$\begin{cases} t^*(\xi)(x-x^*)\notin -\operatorname{int}C_1 \\ s^*(\xi)(y-y^*)\notin -\operatorname{int}C_2 \end{cases} \tag{2}$$

其中, 令 $T(\xi)=T_1(\xi)\times T_2(\xi)\times\cdots\times T_m(\xi)$, $S(\xi)=S_1(\xi)\times S_2(\xi)\times\cdots\times S_n(\xi)$, 而映射 T_i, $S_j: E\to 2^{X'}$, $i=1,\cdots,m$, $j=1,\cdots,n$ 是从 E 到 X' 的集值映射。

令集值映射 F, G: $E\to 2^{X'}$ 为 $F(\xi)=conv\{T_i(\xi)\}_{i=1,\cdots,m}$, $G(\xi)=conv\{S_j(\xi)\}_{j=1,\cdots,n}$。

定义两种集值数量化变分不等式组, 即分别具有强解和弱解的集值数量化变分不等式组。

定义 3集值强数量化变分不等式组, 即找到 $\xi^*=(x^*, y^*)\in E$, $\exists f^*\in F(\xi^*)$, $g^*\in G(\xi^*)$:

$$\begin{cases} <f^*, x-x^*>\geqslant 0 \\ <g^*, y-y^*>\geqslant 0 \end{cases} \forall\xi=(x, y)\in E \tag{3}$$

定义 4集值弱数量化变分不等式组, 即找到 $\xi^*=(x^*, y^*)\in E$, $\forall\xi=(x, y)\in E$, $\exists f^*(\xi)\in F(\xi^*)$, $g^*(\xi)\in G(\xi^*)$:

$$\begin{cases} <f^*(\xi), x-x^*>\geqslant 0 \\ <g^*(\xi), y-y^*>\geqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

在讨论集值变分不等式组(1)式、(2)式、(3)式和(4)式的关系并在给出主要结果前, 先引入著名的 *Kneser* 极大极小值定理。

引理 1[6] 令 A 是向量空间中的非空凸集, B 是 *Hausdoff* 拓扑向量空间中的非空紧凸集。设 f 是定义在 $A\times B$ 上的实值函数, 且对每个给定的 $a\in A$, $f(a,\cdot)$ 在

收稿日期: 2010-11-26
基金项目: 四川省教育厅重点科研项目(07ZA123)
作者简介: 明国芬(1986-), 女, 河南杞县人, 硕士生, 主要从事优化理论及应用方面的研究。

B 上是凸且下半连续的, 对每个给定的 $b\in B$, $f(\cdot, b)$ 在 A 上是凹的, 则 $\min\limits_{b\in B}\sup\limits_{a\in A}f(a,b)=\sup\limits_{a\in A}\min\limits_{b\in B}f(a,b)$。

2 主要结果

定理 1 设对 $i=1,\dots,m$, $x\mapsto T_i(x,\cdot)$ 是非空凸且弱*紧的, 对 $j=1,\dots,n$, $y\mapsto S_j(\cdot,y)$ 是非空凸且弱*紧的, 则 (3)式和 (4)式等价。

证明 显然, 式 (3)⇒式(4)。下证式 (4)⇒式(3)。因为对 $i=1,\dots,m$, $x\mapsto T_i(x,\cdot)$ 是非空凸且弱*紧的, 则 $x\mapsto F(x,\cdot)=conv\{T_i(x,\cdot)\}_{i=1,\dots,m}$ 也是非空凸且弱*紧的。同样, 对 $j=1,\dots,n$, $y\mapsto S_j(\cdot,y)$ 是非空凸且弱*紧的, 则 $y\mapsto G(\cdot,y)=conv\{S_j(\cdot,y)\}_{j=1,\dots,n}$ 也是非空凸且弱*紧的。若 $\xi^*=(x^*,y^*)$ 满足 (4)式, 即 $\forall\xi_0=(x_0,y_0)\in E$, $\exists f^*(\xi_0)\in F(\xi^*)$, $g^*(\xi_0)\in G(\xi^*)$:

$$\begin{cases}<f^*(\xi_0),x-x^*>\geqslant 0\\ <g^*(\xi_0),y-y^*>\geqslant 0\end{cases}$$

也即

$$\begin{cases}<f^*(\xi_0),x^*-x>\leqslant 0\\ <g^*(\xi_0),y^*-y>\leqslant 0\end{cases}$$

故

$$\begin{cases}\sup\limits_{x\in K_1}\min\limits_{f^*(\xi_0)\in F(\xi^*)}<f^*(\xi_0),x^*-x>\leqslant 0\\ \sup\limits_{y\in K_2}\min\limits_{g^*(\xi_0)\in G(\xi^*)}<g^*(\xi_0),y^*-y>\leqslant 0\end{cases}$$

令

$$\begin{cases}f(a,b)=<b,x^*-a>\\ g(c,d)=<d,y^*-c>\end{cases},\begin{cases}A=K_1\\ C=K_2\end{cases},\begin{cases}B=F(\xi^*)\\ D=G(\xi^*)\end{cases}$$

则

$$\begin{cases}\sup\limits_{a\in A}\min\limits_{b\in B}f(a,b)=\sup\limits_{x\in K_1}\min\limits_{f^*(\xi_0)\in F(\xi^*)}<f^*(\xi_0),x^*-x>\leqslant 0\\ \sup\limits_{c\in C}\min\limits_{d\in D}g(c,d)=\sup\limits_{y\in K_2}\min\limits_{g^*(\xi_0)\in G(\xi^*)}<g^*(\xi_0),y^*-y>\leqslant 0\end{cases}$$

显然, 对每个固定的 $a\in A$, $f(a,\cdot)$ 在 X' 的弱*拓扑上是连续的, 在 B 上是凸的, 且对每个固定的 $b\in B$, $f(\cdot,b)$ 是凹的。同样地, 对每个固定的 $c\in C$, $g(c,\cdot)$ 在 X' 的弱*拓扑上是连续的, 在 D 上是凸的, 且对每个固定的 $d\in D$, $g(\cdot,d)$ 是凹的。由引理 1得,

$$\begin{cases}\min\limits_{b\in B}\sup\limits_{a\in A}f(a,b)=\sup\limits_{a\in A}\min\limits_{b\in B}f(a,b)\\ \min\limits_{d\in D}\sup\limits_{c\in C}g(c,d)=\sup\limits_{c\in C}\min\limits_{d\in D}g(c,d)\end{cases}$$

故

$$\begin{cases}\min\limits_{f^*(\xi_0)\in F(\xi^*)}\sup\limits_{x\in K_1}<f^*(\xi_0),x^*-x>\leqslant 0\\ \min\limits_{g^*(\xi_0)\in G(\xi^*)}\sup\limits_{y\in K_2}<g^*(\xi_0),y^*-y>\leqslant 0\end{cases}$$

也即

$$\begin{cases}\min\limits_{f^*(\xi_0)\in F(\xi^*)}\sup\limits_{x\in K}<f^*(\xi_0),x-x^*>\geqslant 0\\ \min\limits_{g^*(\xi_0)\in G(\xi^*)}\sup\limits_{y\in K}<g^*(\xi_0),y-y^*>\geqslant 0\end{cases}$$

令

$$\begin{cases}f^*=f^*(\xi_0)\\ g^*=g^*(\xi_0)\end{cases}$$

则 $\exists f^*\in F(\xi^*)$, $g^*\in G(\xi^*)$,

有

$$\begin{cases}<f^*,x-x^*>\geqslant 0\\ <g^*,y-y^*>\geqslant 0\end{cases},\ \forall\xi=(x,y)\in E$$

即 $\xi^*=(x^*,y^*)$ 满足 (3)式。

定理 2 设对 $i=1,\dots,m$, $x\mapsto T_i(x,\cdot)$ 是非空凸且弱*紧的, 对 $j=1,\dots,n$, $y\mapsto S_j(\cdot,y)$ 是非空凸且弱*紧的, 则 (1)式、(2)式、(3)式和 (4)式等价。

证明 显然, 式(1)⇒式(2)。如果 $\xi^*=(x^*,y^*)$ 满足 (2)式, 则对 $\forall\xi=(x,y)\in E$, $\exists t^*(\xi)\in T(\xi^*)$, $s^*(\xi)\in S(\xi^*)$ 使得 $\begin{cases}t^*(x-x^*)\notin -\operatorname{int}C_1\\ s^*(y-y^*)\notin -\operatorname{int}C_2\end{cases}$, 也即, 存在某个 i_0 和 j_0 及 $t^*_{i_0}(\xi)\in T_{i_0}(\xi^*)$, $s^*_{j_0}(\xi)\in S_{j_0}(\xi^*)$ 使得 $\begin{cases}<t_{i_0}(\xi),x-x^*>\geqslant 0\\ <s_{j_0}(\xi),y-y^*>\geqslant 0\end{cases}$, 令 $f^*=t_{i_0}(\xi)\in F(\xi^*)$, $g^*=s_{j_0}(\xi)\in G(\xi^*)$, 则 $\begin{cases}<f^*,x-x^*>\geqslant 0\\ <g^*,y-y^*>\geqslant 0\end{cases}$。因此, 式 (2)⇒式 (4)。由定理 1, 式 (4)⇔式 (3)。假如 $\xi^*=(x^*,y^*)$ 满足 (3)式, 则存在 $f^*\in F(\xi^*)$, $g^*\in G(\xi^*)$ 使得 $\begin{cases}<f^*,x-x^*>\geqslant 0\\ <g^*,y-y^*>\geqslant 0\end{cases}$, $\forall\xi=(x,y)\in E$。而 $F(\xi)=conv\{T_i(\xi)\}_{i=1,\dots,m}$, $G(\xi)=conv\{S_j(\xi)\}_{j=1,\dots,n}$, 故存在子集 $I\subseteq\{1,\dots,m\}$, 子集 $J\subseteq\{1,\dots,n\}$, $\begin{cases}t^*_i\in T_i(\xi^*),i\in I\\ s^*_j\in S_j(\xi^*),j\in J\end{cases}$, 使得 $\begin{cases}f^*=conv\{t^*_i\}_{i\in I}\\ g^*=conv\{s^*_j\}_{j\in J}\end{cases}$, 因此, 对每个 $\xi\in E$, 存在 $i_0\in I$, $j_0\in J$ 使得

$$\begin{cases}<t^*_{i_0},x-x^*>\geqslant 0\\ <s^*_{j_0},y-y^*>\geqslant 0\end{cases}$$

对于任意

$$\begin{cases}t^*_p\in T_p(\xi^*),p\in\{1,\dots,m\}/I\\ s^*_q\in S_q(\xi^*),q\in\{1,\dots,n\}/J\end{cases}$$

令

$$\begin{cases}t^*=(t^*_k)_{k=1,\dots,m}\in T(\xi^*)\\ s^*=(t^*_l)_{l=1,\dots,n}\in S(\xi^*)\end{cases}$$

则

$$\begin{cases} t^*(x-x^*) \notin -\operatorname{int} R_+^m \\ s^*(y-y^*) \notin -\operatorname{int} R_+^n \end{cases}, \quad \forall \xi = (x, y) \in E$$

故 ξ^* 满足(1)式。因此,(1)式、(2)式、(3)式和(4)等价。

注 (1)在定理2的证明中,推导过程式(3)⇒式(1)⇒式(2)⇒式(4)中均未涉及到"对 $i=1,\cdots,m$, $x \mapsto T_i(x,\cdot)$ 是非空凸且弱*紧的,对 $j=1,\cdots,n$, $y \mapsto S_j(\cdot,y)$ 是非空凸且弱*紧的"的假设条件,此条件仅用在式(4)⇒式(3)的证明中。

(2)当 $K_1=K_2$, $m=n$ 时,本文所研究的集值向量变分不等式组(1)式和(2)式,就退化为文献[1]中的集值向量变分不等式。

参考文献:

[1] Konnov I V. A scalarization approach for vector variational inequalities with applications[J]. Journal of Global Optimization, 2005, 32: 517-527.

[2] Luc D T. Theory of Vector Optimization[M]. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1989.

[3] Podinovskii V V, Nogin V D. Pareto-Optimal Solutions of Multicriteria Problems[M]. Moscow (in Russian): Nauka, 1982.

[4] Li J, Mastroeni G. Vector variational inequalities involving set-valued mappings via scalarization with applications to error bounds for gap functions[J]. Journal Optimization Theory Application, 2010, 145: 355-372.

[5] Li J, Huang N J, Yang X Q. Weak sharp minima for set-valued vector variational inequalities with an application[J]. European Journal of Operational Research, 2010, 205: 262-272.

[6] Kneser H. Sur un theoreme fundamental de la theorie des jeux[J]. C. R. Academy Science Paris, 1952, 234: 2418-2420.

A Scalarization Approach for a System of Set-valued Vector Variational Inequalities

MING Guo-fen

(College of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637002, China)

Abstract: In this paper, four kinds of systems of set-valued variational inequalities were defined, that is, strong and weak systems of set-valued vector variational inequalities, and strong and weak systems of set-valued scalar variational inequalities. By applying the approach of Konnov, the scalar system of set-valued variational inequalities of a system of set-valued vector variational inequalities was presented, then the equivalence of these two systems of set-valued variational inequalities was given.

Key words: scalarization approach; systems of set-valued vector variational inequalities; Kneser minimax theorem; weakly* compact