

# 基于 Logistic 映射的迭代式的混沌特性及混沌控制

冯 汉, 索 宇, 朱培勇

(电子科技大学数学科学院, 成都 610054)

**摘 要:** 在一维 Logistic 映射的基础上, 提出了一种新的迭代式, 研究了该式的混沌特性, 发现其具有更丰富的混沌动力学行为(如窗口), 并利用辅助参考反馈法对此式进行了混沌控制, 成功的将系统控制到低周期轨道, 且控制速度快、控制时操作方便, 并得到了良好的效果。

**关键词:** 混沌; 混沌控制; 辅助参考反馈

**中图分类号:** O18

**文献标识码:** A

自美国学者 Ott E, Grebogi C, Yorke J A<sup>[1]</sup> 提出 OGY 混沌控制法以来, 先后出现许多混沌控制方法<sup>[2,3]</sup>。这些控制方法各有其优点和适用范围。文章在一维 Logistic 映射函数的基础上, 提出一种新的迭代式, 并利用数值模拟法研究了此式的混沌特性, 再利用辅助参考反馈控制法<sup>[3]</sup> 对此式进行了混沌控制, 取得了良好的控制效果。

种群(不考虑物种之间的竞争且是无世代单一交叠), 每年繁衍  $n (n \geq 3)$  次, 且每次各产卵一次, 成虫产卵后全部死亡, 每个虫卵孵出一只虫子, 每次对虫子而言生长的自然环境不同, 因此引发产卵率和成活率也不同, 与 Logistic 模型相比, 每次  $k_n$  取值不同, 即  $u$  值不同。

## 1 迭代式的建立及其混沌特性

用不完全归纳法得出所研究的迭代表达式当  $n = 1$  或 2 时, 式子是显然的;

一维 Logistic 映射<sup>[4]</sup>:  $X_{n+1} = \mu X_n (1 - X_n)$ , 当  $3 < \mu < 4$  时, 系统进入倍周期分岔图, 其周期为:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow \dots \rightarrow 2^n \rightarrow \dots \rightarrow \infty$ , 利用数值模拟 Logistic 方程得分岔图(图 1), 可见一维 Logistic 方程虽是一个简单的一维迭代方程, 却蕴含着丰富的动力学行为, 为无世代交叠的单一生物种群的生物繁衍提供了简单的数学模型。

当  $n = 3$  时: 有方程:

$$X_{3n} = k_1 X_{3n-1} (1 - X_{3n-1}) \tag{1}$$

$$X_{3n+1} = k_2 X_{3n} (1 - X_{3n}) \tag{2}$$

$$X_{3n+2} = k_3 X_{3n+1} (1 - X_{3n+1}) \tag{3}$$

由(3)式有:

$$X_{3n-1} = k_3 X_{3n-2} (1 - X_{3n-2}) \tag{4}$$

把(4)式代入(1)式得:

$$X_{3n} = k_1 k_3 X_{3n-2} (1 - X_{3n-2}) \times [1 - k_3 X_{3n-2} (1 - X_{3n-2})] \tag{5}$$

把式(1)代入式(2)得:

$$X_{3n+1} = k_1 k_2 X_{3n-1} (1 - X_{3n-1}) \times [1 - k_1 X_{3n-1} (1 - X_{3n-1})] \tag{6}$$

把(2)式代入(3)式得:

$$X_{3n+2} = k_2 k_3 X_{3n} (1 - X_{3n}) \times [1 - k_2 X_{3n} (1 - X_{3n})] \tag{7}$$

由上面推导方法: 一般地, 当系统迭代  $k (k \geq 3)$  次时, 我们有如下方程:

$$X_{kn} = k_1 k_k X_{kn-2} (1 - X_{kn-2}) \times$$

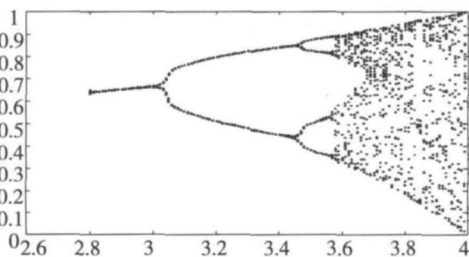


图 1 Logistic 方程分岔图

对 Logistic 模型推广: 假定在一个岛屿上的单一生物

$$\begin{aligned}
& [1 - k_k X_{kn-2} (1 - X_{kn-2})] \\
X_{kn+1} &= k_1 k_2 X_{kn-1} (1 - X_{kn-1}) \times \\
& [1 - k_k X_{kn-1} (1 - X_{kn-1})] \\
& \dots\dots \\
X_{kn+(k-1)} &= k_{(k-1)} k_k X_{kn+(k-3)} (1 - X_{kn+(k-3)}) \times \\
& [1 - k_{(k-1)} X_{kn+(k-3)} (1 - X_{kn+(k-3)})]
\end{aligned}$$

又因为上面的式子对称, 因其对称性, 研究 (1) 式的性质, 同理可得其他式子的性质。所以有如下迭代式:

$$X_{n+2} = aX_n(1 - X_n) / [1 - bX_n(1 - X_n)] \quad (8)$$

利用数值模拟<sup>[56]</sup>, 通过观察发现, 当  $3.5 < a < 4.5$  ( $b = 0.5$ ) 时, (8) 式出现倍周期分岔现象 (图 2); 正如一维 Logistic 映射表现出丰富的混沌动力行为, 如暗线窗口等现象, 而且特征更为明显。

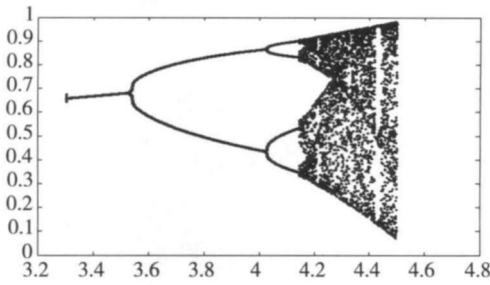


图 2 新迭代方程分叉图

## 2 混沌控制

利用文献 [3] 中的 ARF 方法对 (8) 式进行混沌控制。以一维映射为例简要说明此方法的控制原理:

在一维映射  $X_{n+1} = F(r, X_n)$  式中引入 ARF 控制项, 则:

$$X_{n+1} = F(r, X_n) + m(X_n - X_{ref})$$

其中,  $m$  为参考 (反馈) 系数,  $X_{ref}$  为参考项, 假设已达到控制目标  $\bar{X}$ , 则有:

$$\bar{X} = F(r, \bar{X}) + m(\bar{X} - X_{ref})$$

$\bar{X}$  即为此式的稳定不动点, 则稳定不动点处的 Jacob 矩阵为:

$$J = \left. \frac{\partial F(X_n)}{\partial X_n} \right|_{X_n = \bar{X}}$$

因此被控系统稳定的充分条件是:

$$|J| < 1 \quad (9)$$

式 (9) 给出了反馈系数和参考项的取值范围, 虽然不能直接确定反馈项系数和参考项的值, 但是在实际应用中只需通过对系统的观察来确定  $X_{ref}$  的范围, 合理的选择反馈系数就可以达到控制目的, 使系统趋于稳定状态。

用 ARF 法对 (8) 式进行控制, 则 (8) 式变为:

$$X_{n+2} = aX_n(1 - X_n) / [1 - bX_n(1 - X_n)] +$$

$$g(X_n - X_{ref})$$

当达到控制目标  $\bar{X}$  时, 我们有:

$$\bar{X} = F(r, \bar{X}) + g(\bar{X} - X_{ref})$$

其中,  $F(r, \bar{X}) = a\bar{X}(1 - \bar{X}) / [1 - b\bar{X}(1 - \bar{X})]$ , 所以系统的稳定条件为  $\left| \frac{\partial F(r, X_n)}{\partial X_n} \right|_{X_n = \bar{X}} + g < 1$  由此可知,

调节参考系数  $m$  及参考项  $X_{ref}$  的值, 就可把 (8) 式控制到稳定的轨道上。利用数值模拟, 当  $a = 3.5$   $b = 0.5$   $g = 0.08$   $m \in (0.0005, 0.1)$  时, 辅助参考项  $X_{ref}$  变化出现不同的控制结果 (图 3-图 6), 加上控制器后的控制系统是以控制参数为系统参数的一个不同于原系统的新的动力系统, 改变控制参数就可以观察到分岔现象; 显然, 适当选择控制参数就可以获得各种所需的目标动力学行为, 同时可知, 反馈系数  $m$  越小可控的动力学行为越好。

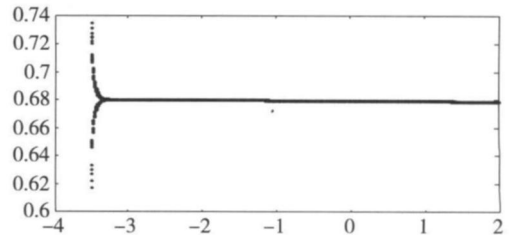


图 3 m=0.0005 控制图

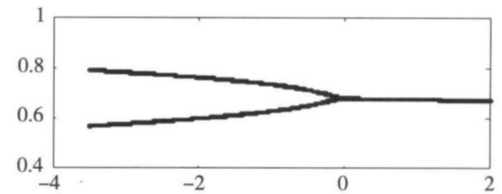


图 4 m=0.01 控制图

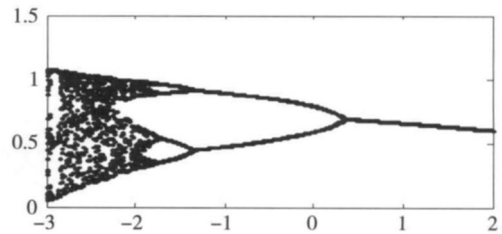


图 5 m=0.9 控制图

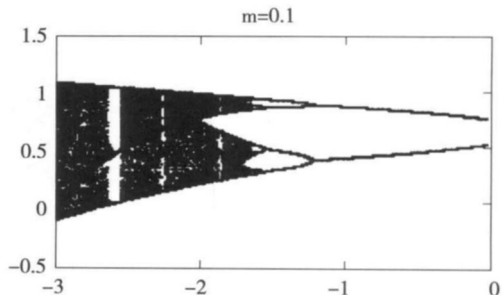


图 6 m=0.1 控制图

#### 4 结 论

在生态研究领域的 Logistic 模型基础上加以推广,建立了无世代交叠的单一生物种群繁衍  $n$  次的新的迭代式,并对此进行研究发现其具有更丰富的混沌动力学行为。利用辅助参考反馈方法对此进行了混沌控制,得到了很好的控制效果。

#### 参 考 文 献:

- [1] Ott E, Grebogi C, Yorke JA. Control chaos[J]. Phys rev Lett 1990, 35(64): 1196
- [2] Pyras K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback[J]. Phys Lett A, 1993, 181: 29-32
- [3] 唐芳,邱琦.混沌系统的辅助参考反馈控制[J].物理学报,1999,48(5):802-807.
- [4] 张景中.函数迭代与一维动力系统[M].成都:四川教育出版社,1991.
- [5] 郑伟,刘玲.一种新虫口模型的混沌特性及混沌控制[J].辽宁师范大学学报:自然科学版,2006,29(4):418-421.
- [6] 周小安,陈田明.基于变量反馈的最优混沌控制[J].深圳大学学报:理工版,2005,22(1):37-39.

### Chaotic Characteristic and Chaos Control of an Iterative Function Based on Mapping of Logistic

FENG Han, SUO Yu, ZHU Pei-yong

(School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610000, China)

**Abstract** Based on One-Dimensional Logistic Mapping a new iterative function was presented. Its chaotic characteristic and chaos control was studied. It was found that this function has more abundant chaotic dynamic behavior. The model is successfully controlled into a low period. The model has the following advantages in stability, flexibility. And good effect was achieved through chaos control employed in the Auxiliary Reference Feedback Method.

**Key words** chaos, chaos control, auxiliary reference feedback