文章编号: 1673-1549(2011)01-0022-02

几类 $\delta(G)\geqslant n-4$的图的可靠性研究

卫 良

(青海师范大学数学与信息科学系, 西宁 810008)

摘 要: 要找出拓扑结构稍复杂的图类中的一致最优图是非常困难的, 因此, 更多的研究人员开始研究图的局部最优性问题。文章通过研究网络可靠性设计中边不可靠点可靠情况下网络的局部最优性问题, 给出了一个边分割集的组合计数公式, 同时给出了几类 $\delta(G)\geqslant n-4$的图类的局部最优性结果。

关键词: 边失效; 网络可靠性; 组合计数

中图分类号: O157.5　　文献标识码: A

引 言

对于给定的具有 n个点, e条边的图 G, 在顶点能正常工作, 边以相互独立且具有相同概率 $q(0<q<1)$失效, 因此, 由边失效导致某两点不能正常通信的概率为 $P_e(G,q)$, 即

$$P_e(G,q)=\sum_{i=1}^{e}M_i(G)q^i(1-q)^{e-i} \tag{1}$$

其中, M_i 表示 G 中含有 i条边的分割集的个数, 称 $P_e(G,q)$为网络 G的边失效不可靠多项式。显然, 网络 G的任意两个点能正常通信的概率为

$$R_e(G,q)=1-P_e(G,q)=1-\sum_{i=1}^{e}M_i(G)q^i(1-q)^{e-i} \tag{2}$$

称 $R_e(G,q)$为网络 G的边失效可靠多项式。

组合计数方法目前在图论相关问题研究中起着非常重要的作用, 特别是在网络可靠性方面的作用日益显现, 文献[1]中较早的就提出了组合计数模型在网络可靠性模型研究中的应用, 多个重要定理的证明中都用到了组合计数的概念。另外, 在文献[2-5]中, 解决相关计数问题时都用到了组合计数的方法, 在图论研究的很多问题中, 组合计数方法也是非常重要的[6]。

文献[7]中给出了限定条件下边分割集的一种组合计数公式, 并给出了几类 $\delta(G)\geqslant n-3$的图类的局部最优性结果, 本文在该方法基础上, 进一步得到了几类 $\delta(G)\geqslant n-4$的图类的局部最优性结果。

1 主要结果

定理 1 设 $n\geqslant 11$, $G\in\Omega(n,e)$, 令 $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$度点的个数分别为 t_1, t_2, t_3, t_4则:

(1) $\lambda(G)=n-4$;

(2)当 $n-4\leqslant i\leqslant 2n-11$时

$$M_i=t_1\binom{e-n+1}{i-n+1}+t_2\binom{e-n+2}{i-n+2}+t_3\binom{e-n+3}{i-n+3}+t_4\binom{e-n+4}{i-n+4} \tag{3}$$

$$M_{2n-10}=N_{3\times3}(\bar{G})+t_1\binom{e-n+1}{n-9}+t_2\binom{e-n+2}{n-8}+t_3\binom{e-n+3}{n-7}+t_4\binom{e-n+4}{n-6}$$

其中, $N_{3\times3}(\bar{G})$表示 $\bar{G}$中不相邻的 3度点的点对个数。

证明 G的任意边分割集将 $V(G)$至少分成不连通的两部分。设 $S\cup\bar{S}$且 $|S|\leqslant|\bar{S}|$, 用 $f(S)$表示将 $V(G)$分成不连通的两部分 $S\cup\bar{S}$且边数最少的边分割集的元素个数(即边数), 则 $f(S)\geqslant|[S,\bar{S}]|$, 其中 $[S,\bar{S}]$表示一个端点在 S中, 另一个端点在 $\bar{S}$中的所有边组成的集合。设 $|S|=k$, 则有

$$|[S,\bar{S}]|\geqslant k(\delta(G)-k+1)$$

等号成立当且仅当导出子图 $G[S]$为完全子图且 S中的每个点的度数都等于 $\delta(G)$, 由于 $\delta(G)\geqslant n-4$且 $|[S,\bar{S}]|\geqslant k(\delta(G)-k+1)$, 得

$$f(S)=k(n-3-k) \tag{4}$$

此时边分割集不包含导出子图 $G[S]$中的边, $G[S]$是

收稿日期: 2010-11-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10641003)

作者简介: 卫良(1978-), 男, 青海乐都人, 讲师, 硕士, 主要从事理论计算机, 网络可靠性方面的研究。

完全图且 S中每个点的度数都等于 $n-4$, 对(4)式中的 k分 3种情况讨论:

情况 1: 当 $|S| = k = 1$时, $f(S) = n-4$。

情况 2: 当 $|S| = k = 2$时, $f(S) = 2n-10$。

情况 3: 当 $|S| = k \geqslant 3$时, $f(k) = -k^2 + (n-3)k$。

由情况 3可以看出: 当 $k = \frac{n-3}{2}$时, $f(k)$达到最大值; 而当 $k = \frac{n}{2}$时, $f(\frac{n}{2}) = \frac{n^2-6n}{4}$。

易证: 当 $n \geqslant 11$时, $\frac{n^2-6n}{4} \geqslant 2n-10$。由此可得当 $|S| \geqslant 2$, $f(S) \geqslant 2n-10$等式成立当且仅当 $|S| = 2$且 $G[S]$为一条边。

由上面的讨论可得: $\lambda(G) = n-4$, 因而(1)式成立。且对于 $n-4 \leqslant i \leqslant 2n-11$, 每一个 i条边的分割集只能将 G分成一个独立点和一个连通子图, 因而(2)式成立。每一个 $2n-10$条边的分割集只能将 G分成一个独立点和一个连通子图或是一个 K_2和一个连通子图, 因而(3)式成立, 定理 1得证。

定理 2 设 G_i($1 \leqslant i \leqslant 8$)的补图, 如图 1所示, 设$H$为一个简单图且 $\Delta(H) \leqslant 3$, 不妨设$H = mK_4 \cup hK_3$, ($m \geqslant 0$, $h \geqslant 0$), 则当 $q \to 0$时, $R_e(G_{2i-1}, q) < R_e(G_{2i}, q)$, 其中 $i = 1, 2, 3, 4$。

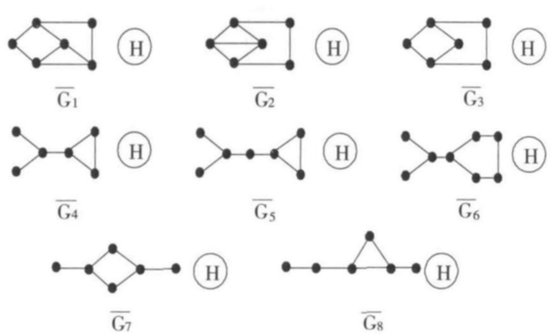

图 1　几类 $\delta(\bar{G}) \geqslant n-4$图

证明　只需证$P_e(G_{2i-1}, q) > P_e(G_{2i}, q)$, 从图 1可以看出 G_{2i}和 G_{2i-1}中的 $n-1$度点数, $n-2$度点数, $n-3$度点数和 $n-4$度点数分别相等, 由定理 1可得:

当 $j \leqslant 2n-11$, $M_j(G_{2i-1}) = M_j(G_{2i})$, 其中 $i = 1, 2, 3, 4$。

当 $j = 2n-10$时,

$$M_{2n-10}(G_{2i-1}) - M_{2n-10}(G_{2i}) = N_{3\times3}(\overline{G_{2i-1}}) - N_{3\times3}(\overline{G_{2i}})$$

其中, $i = 1, 2, 3, 4$。

从图 1可以看出, 对每一个 i均有

$$N_{3\times3}(\overline{G_{2i-1}}) - N_{3\times3}(\overline{G_{2i}}) > 0$$

因而得到

$$M_{2n-10}(G_{2i-1}) - M_{2n-10}(G_{2i}) > 0$$

故当 $q \to 0$时, $P_e(G_{2i-1}, q) > P_e(G_{2i}, q)$, 即 $R_e(G_{2i-1}, q) < R_e(G_{2i}, q)$, 其中 $i = 1, 2, 3, 4$。

定理 2证。

2　结束语

本文通过边分割集的一个组合计数公式, 给出了几类 $\delta(G) \geqslant n-4$的图类当 $q \to 0$时的局部最优性结果, 文献[5]中只给出了 $\delta(G) \geqslant n-3$的图类的局部最优性结果, 本文对其结果做了进一步的拓展和延伸。

参 考 文 献:

[1] Colbourn C. The Combinatories of Network Reliability[M]. Oxford: Oxford University Press, 1987.

[2] Chao C Y, Zhao L C. Chromatic polynomials of a family of graphs[J]. Ars Combinatoria, 1983, 15: 11.

[3] Myrvold W, Cheung K H, Page L B, et al. Uniformly-most reliable networks do not always exist[J]. Networks, 1991, 21: 417-419.

[4] 陈明明, 赵连昌. 一致最优与最差可靠网络[J]. 石油化工高等学校学报, 2000, 14(4): 73-75.

[5] 赵海兴. 子图多项式和网络的可靠性研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2004.

[6] Gilbert B, Myrvold W. Maximizing spanning strees in almost complete graphs[J]. Networks, 1997, 30: 23-30.

[7] 李晓明. 网络可靠性综合的现状及其展望[J]. 计算机学报, 1990, 13: 699-750.

Study on Network Reliability of Some Graphs with $\delta(G) \geqslant n-4$

WEI Liang

(Mathematics and Information Science, Qinghai Normal University, Xining 810008, China)

Abstract It's difficult to find the uniformly optimally reliable graph with complex topological structure, and more researchers' interests turn to local optimality problem. The local optimality of network, which nodes perfectly reliable and edges fail independently, was discussed. Using a combination enumeration formula of edge cutsets, we gave some results of local optimality network with $\delta(G) \geqslant n-4$.

Key words edge failure; network reliability; combinatorial enumeration