

# 非线性碰撞系统的多吸引子共存研究

冯进钤<sup>1</sup>, 杨海忠<sup>2</sup>

(1. 西安工程大学理学院, 西安 710048; 2. 西安财经学院精算系, 西安 710100)

**摘要:**研究具有单边刚性约束的非线性动力学系统的多吸引子共存现象, 针对碰撞动力学系统的运动特性, 结合插值法和事件切换法, 快速精确地定位系统状态发生切换的时刻, 进而给出一种高效的数值解方法。并以一类典型的非线性碰撞系统为例, 结合广义胞映射的思想, 得到了系统共存的多个吸引子的空间布局、吸引盆及清晰的盆边界。研究结果表明, 高效的数值解方法为系统多吸引子共存研究提供有效的精度保证, 是进行全局分析的有力工具。

**关键词:**非光滑动力系统; 碰撞系统; 共存吸引子; 吸引盆

**中图分类号:** O175. 14

**文献标识码:** A

## 引言

近年来, 国内外学者对动力系统中非光滑因素展开了广泛的研究, 建立了大量的非光滑系统模型, 并通过深入的理论分析和数值实验验证, 逐步揭示了非光滑系统的动力学特性<sup>[1]</sup>。Shaw S W<sup>[2]</sup>利用中心流形理论分析了周期激励下的线性碰撞振子的局部分岔与混沌。Nordmark A B<sup>[3]</sup>阐述了一个碰撞机械系统中擦边周期轨的存在性及其分岔。Chin W 等<sup>[4]</sup>和 Weger J 等<sup>[5]</sup>借助不连续局部映射进一步讨论了系统周期轨的擦边导致的复杂动力学。

目前, 碰撞型非光滑系统的研究主要集中在系统的局部分析, 对于系统中多吸引子共存等全局结构的研究甚少。本文利用插值法和事件切换法, 快速定位事件切换时刻, 提高系统数值解的精度。并结合广义胞映射的思想分析了系统多吸引子共存现象。

## 1 单边碰撞系统的事件切换法

考虑单边刚性碰撞系统, 系统模型所遵循的方程如下:

$$\begin{cases} \ddot{x} + ax + b\dot{x} + x^3 = f\cos(\omega t) & , \quad x < \Delta \\ \dot{x}_+ = -R\dot{x}_- & , \quad x = \Delta \end{cases} \quad (1)$$

这里上标“·”表示对时间  $t$  求导。其中常量  $a$  表示系统刚度的线性部分,  $b$  和  $f$  分别表示系统的阻尼系数和谐和激励的强度。 $x = \Delta$  表示位移间隙, 描述了系统状态的碰撞位置。 $R$  表示碰撞恢复系数, 通常与碰撞面的材料有

关。下标“-”和“+”分别表示碰撞前后的时刻。令碰撞时刻为  $t^*$ , 则有  $\dot{x}_\pm = \dot{x}(t^* \pm 0)$ 。令  $Y = (y_1, y_2)^T = (x, \dot{x})^T$ , 由系统运动特性, 定义碰撞面、擦边面和滑动面

$$\Sigma_l \equiv \{Y \in R^2: H(Y) \equiv y_1 - \Delta = 0\}$$

$$\Sigma_c \equiv \{Y \in \Sigma_l: V(Y) \equiv y_2 = 0\}$$

$$\Sigma_s \equiv \{Y \in \Sigma_c: A(Y) \equiv -ay_1 - y_1^3 - by_2 + f\cos(\omega t) = 0\}$$

由三个曲面方程可以得到系统的三个事件函数  $H(Y)$ 、 $V(Y)$  和  $A(Y)$ , 结合系统的状态空间及运动特点, 系统可能出现三种事件之间的切换: ①无碰撞-碰撞; ②无碰撞-粘滑; ③碰撞-粘滑。只要系统的事件函数为零, 系统的运动状态即发生切换。

事件切换时刻的数值定位可以利用抛物型插值法。令系统的轨线流为  $\varphi(Y, t)$ , 假设切换前后系统两个状态为  $Y_1 = \varphi(Y_0, t_0 + t_1)$ ,  $Y_3 = \varphi(Y_0, t_0 + t_2)$ 。结合系统运动方程, 首先得到中间时刻状态  $Y_2 = \varphi(Y_0, t_0 + \frac{t_1 + t_2}{2})$ 。由  $Y_1, Y_2, Y_3$  及事件函数  $e(Y) = (H(Y), V(Y), A(Y))$ , 结合插值法得到方程组

$$\begin{cases} e(Y^*) = 0 \\ L_2(Y^*) = \sum_{k=1}^3 Y_k^* l_k(Y^*) \end{cases} \quad (2)$$

其中  $Y^* = (y_1^*, y_2^*)^T$  表示事件切换时刻的系统状态,  $l_k(Y)$  为 Lagrange 插值基函数。

碰撞系统事件切换法的主要步骤如下:

(1) 对于指定初始条件判断系统所处的运动状态, 选择合适的向量场或离散映射。

(2) 定义三种事件函数  $H(Y)$ ,  $V(Y)$  和  $A(Y)$ , 依据 (2) 式中的插值法定位事件切换时刻, 确定系统状态的切换形式。

(3) 得到系统切换后的状态, 监视事件函数的值。将所得的状态作为新的初始条件, 重复 (1) - (3) 步骤。

事件切换法可以快速精确地捕捉系统状态的切换时刻, 保证系统的数值解具有很好的精度。由数值分析知识知, 对于给定的精度, 定位切换事件的插值法是至少平方收敛的, 显然比具有线性收敛速度的二分法要快。

## 2 多吸引子共存

对于动力系统方程 (1), 首先选取 Poincaré 截面  $\Pi = \{(Y, t) : Y \in R^2, t \in R, \text{mod}(t, \frac{2\pi}{\omega})\}$ , 建立 Poincaré 映射  $P: \Pi \rightarrow \Pi$ 。基于广义胞映射思想, 首先将感兴趣的状态空间  $D = \{(y_1, y_2) : y_1 \in [-2, 1], y_2 \in [-2, 2]\}$  划分为  $200 \times 200$  的网格, 每个小网格表示一个胞, 每个胞中随机选取 16 个初始点进行数值积分。基于 Poincaré 映射建立胞与胞之间的关系  $C(i, j) = \begin{cases} 1 & iR_j \\ 0 & i\bar{R}_j \end{cases}$ , 其中  $iR_j$  ( $i\bar{R}_j$ ) 分别表示胞  $i$  与胞  $j$  (没) 有关系。基于广义图胞映射思想<sup>[6]</sup>, 建立胞映射与有向图  $G = \langle N, E \rangle$  的对应, 其中  $N$  和  $E$  分别表示节点集和边集。每个胞可看作有向图的一个节点, 考虑到陷胞的存在, 从而有向图的节点数  $N = 40001$ , 胞的映射关系  $C(i, j)$  构成图的边集  $E$ 。

当系统参数为  $a = 1, b = 0.02, f = 0.77, R = 0.8, \Delta = 1, \omega = 0.678$ , 图 1 给出系统 (1) 的全局结构图。从图 1 中可以看到, 系统 (1) 的 4 个吸引子  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 共存, 对应的胞序列号分别为  $P_1 = \{13950, 14147, 14148, 14149, 14150, 14347\}$ ,  $P_2 = \{15579\}$ ,  $P_3 = \{25185\}$ ,  $P_4 = \{23398\}$ 。光滑的盆边界上存在两个鞍  $S_1 = \{13164\}$  和  $S_2 = \{20188\}$ 。吸引子  $P_i$  对应的吸引盆为  $B_i$ , 边界胞记为  $B$ , 胞的分布见表 1。

表 1 胞分布

项 目	胞分布				
胞的类型	B1	B2	B3	B4	B
胞的个数	10097	15574	2255	4706	5351

## 3 结束语

借助事件切换的策略, 给出了一种计算非线性碰撞

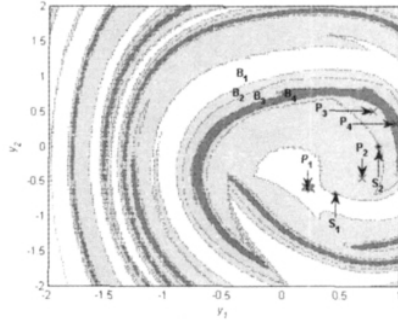


图 1 系统 (1) 的全局分析图

注: 标号“×”和“\*”分别表示稳态吸引子  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 和鞍  $S_j$  ( $j = 1, 2$ )。吸引子  $P_i$  对应的吸引盆为  $B_i$  (对应的灰度 RGB 为  $B_1 = [0.94, 0.94, 0.94]$ ,  $B_2 = [0.83, 0.92, 0.78]$ ,  $B_3 = [0.8, 0.8, 0.8]$ ,  $B_4 = [0.5, 0.5, 0.5]$ )。黑色表示边界为  $B$ , 空白表示陷胞。

系统数值解的高效方法, 基于广义图胞映射的思想, 研究了系统的多吸引子共存现象。研究表明, 碰撞系统中由于非光滑因素的存在, 系统表现出多吸引子共存, 改进的胞映射方法对于碰撞系统的全局动力学研究提供一种数值的洞察力。

## 参 考 文 献:

- [1] 冯进钤, 徐伟, 牛玉俊. Duffing 单边碰撞系统的颤振分岔 [J]. 物理学报, 2010, 59(1): 157-163.
- [2] Shaw S W. The Dynamics of a Harmonically Excited System Having Rigid Amplitude Constraints, Part 1: Subharmonic Motion and Local Bifurcation [J]. Journal of Applied Mechanics, 1985, 52: 453-458.
- [3] Nordmark A B. Existence of periodic orbits in grazing bifurcations of impacting mechanical oscillators [J]. Nonlinearity, 2001, 14: 1517-1542.
- [4] Chin W, Ott E, Nusse H E, et al. Grazing bifurcation in impact oscillators [J]. Physical Review E, 1994, 50(6): 4427-4444.
- [5] de Weger J, van de Water W, Molenaar J. Grazing impact oscillations [J]. Physical Review E, 2000, 62(2): 2030-2041.
- [6] 李爽, 徐伟, 李瑞红. Duffing-van der Pol 系统的随机分岔 [J]. 力学学报, 2006, 38(3): 429-432.

## Coexistence of Multiple Attractors in a Non-linear Vibro-impact System

FENG Jin-qian<sup>1</sup>, YANG Hai-zhong<sup>2</sup>

(1. School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China;

2. Department of Actuary, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an 710100, China)

**Abstract:** Coexistence of multiple attractors in a non-linear system with the rigid barrier is investigated. Based on the character of dynamical system, interpolation method and event-stitching strategy are used to load the discontinuous instants of time. An effective method is introduced to study the dynamics. As an illustrative example, a typical non-linear vibro-impact system is studied. The results show the spatial configuration consisted of attractors, domains of attraction, boundary of basin and saddles. The presented simulation method ensures the numerical precision, and provides a powerful tool for global analysis.

**Key words:** non-smooth dynamic system; vibro-impact system; coexistence of attractors; domains of attraction