

# 基于 O - U 过程的幂函数族期权定价

刘兆鹏, 张增林

(宿州学院数学与统计学院, 安徽 宿州 234000)

摘要: 为了使股票模型更加接近市场实际情况, 文章针对股价波动的几何布朗运动模型对收益率假设的缺陷, 对该模型进行了改进, 假设股票价格遵循能反映股票预期收益率波动变化的指数 O - U 过程, 利用 Girsanov 定理获得了指数 O - U 过程模型的唯一等价鞅测度。利用期权定价的鞅方法, 得到了指数 O - U 过程随机模型下具有连续红利支付的幂函数族期权的定价公式。

关键词: 指数 Ornstein - Uhlenback 过程; 鞅方法; 幂函数族期权; 连续红利

中图分类号: F830. 91

文献标识码: A

期权定价是金融数学的核心问题之一。随着金融衍生产品市场的发展, 期权的创新种类不胜枚举, 即所谓的新类型期权; 幂函数族期权就是其中之一。幂函数族期权是一种结构简单且具有较低权利金的新类型期权, 在金融市场中很受投资者的欢迎。文献 [1 - 2] 研究了参数为常数时的此类期权, 本文假设股票价格遵循指数 O - U 过程, 参数为时间的函数的情况下, 利用鞅论、随机分析等数学工具, 得到了具有连续红利支付的幂函数族期权的定价公式, 对已有结论进行了改进和推广。

## 1 市场模型

考虑幂函数族买权, 其到期收益为

$$C_{\alpha}(S, T - t, K) = \max(S_T^{\alpha_1} - K^{\alpha_1}, 0)$$

其中,  $S_T$  是标的资产到期时的价格;  $K$  是执行价格;  $0 < \alpha_1 \leq 1$  是参数。经济解释如下:

(1) 在到期时, 若标的资产价格  $S_T$  小于或等于执行价格  $K$ , 则该买权的收益为零。这与标准的欧式期权的到期收益相同。

(2) 在到期时, 若标的资产价格  $S_T$  大于执行价格  $K$ , 则该买权的收益等于标的资产价格的  $\alpha_1$  次幂减去执行价格的  $\alpha_1$  次幂, 即  $S_T^{\alpha_1} - K^{\alpha_1}$ 。当  $\alpha_1 = 1$  的时候即为标准的欧式期权。

## 2 O - U 过程模型下幂函数族期权定价

考虑一个连续时间无套利的完备金融市场, 市场上有两种可交易的资产: 一种是债券, 在  $t$  时刻的无风险利率为  $r(t)$ ; 另一种是风险资产(股票), 在  $t$  时刻的价格  $S(t)$  满足随机微分方程

$$dS(t) = (\mu(t) - q(t) - \alpha_2 \ln S(t)) S(t) dt + \sigma(t) S(t) dW(t), S(0) = S \tag{1}$$

其中  $\{W(t) | 0 \leq t \leq T\}$  是定义在完备概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的标准 Brown 运动,  $\mu(t)$ 、 $\sigma(t)$  和  $q(t)$  为时间  $t$  的函数, 并且  $\alpha_2 > 0$ ,  $S > 0$  为常数。

记  $S^*(t) = \exp\left\{-\int_0^t r(u) du\right\} S(t)$  为价格  $S(t)$  的折现过程。对指数 O - U 过程模型, 可以证明市场模型是完备的无套利市场<sup>[3-4]</sup>。

引理 1<sup>[5-6]</sup> 假设股票价格过程满足指数 O - U 过程模型, 令

$$\theta(t) = \frac{r(t) - \mu(t) + \alpha_2 \ln S(t)}{\sigma(t)}$$

若  $E^P\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s) ds\right\}\right] < \infty$ , 则存在唯一与概率测度  $P$  等价的概率测度  $Q$ , 使得在概率测度  $Q$  下折现过程  $S^*(t) = S(t) \exp\left\{-\int_0^t r(s) ds\right\}$  是一鞅过程。若令

收稿日期: 2011-3-09

基金项目: 宿州学院自然科学研究项目(2009yzk20); 宿州学院硕士科研启动基金(2008yys20)

作者简介: 刘兆鹏(1981-), 男, 安徽宿州人, 讲师, 硕士, 主要从事金融数学、随机分析方面的研究。

$W^Q(t) = W(t) - \int_0^t \theta(s) ds$ , 则由 Girsanov 定理可知在概率测度  $Q$  下  $W^Q(t)$  是一个 Brown 运动, 且股票的价格过程  $S(t)$  满足

$$S(t) = S \exp \left\{ \int_0^t (r(s) - q(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s)) ds + \int_0^t \sigma(s) dW^Q(s) \right\} \quad (2)$$

该幂函数族买权当前时刻的合理价格  $C_\alpha$  为未来预期的现金流在当前时刻的贴现值, 即

$$C_\alpha = \exp \left\{ - \int_t^T r(s) ds \right\} E^Q [C_T | F_t] = \exp \left\{ - \int_t^T r(s) ds \right\} E^Q [\max(S_T - K, 0) | F_t] = \exp \left\{ - \int_t^T r(s) ds \right\} E^Q [I_A | F_t]$$

其中,  $E^Q[\cdot]$  表示在风险中性的等价鞅测度  $Q$  下求期望,  $A = \{S_T | S_T > K\}$ ,  $I_A$  是示性函数, 其定义如下:

$$I_A = \begin{cases} 1, & \text{如果 } S_T > K \\ 0, & \text{如果 } S_T \leq K \end{cases}$$

为了求数学期望, 需要用下面的引理:

引理 2 在风险中性的等价鞅测度  $Q$  下, 标的资产价格满足 (2) 式, 则有

$$(1) E^Q [S_T^\alpha I_A | F_t] = S_t^\alpha \exp \left\{ \int_t^T [\alpha_1(r(s) - q(s)) + \frac{\alpha_1^2 - \alpha_1}{2} \sigma^2(s)] ds \right\} N(d_1)$$

$$(2) E^Q [K^\alpha I_A | F_t] = K^\alpha N(d_2)$$

其中

$$d_1^* = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \int_t^T [(r(s) - q(s)) + \frac{1}{2} \sigma^2(s) (2\alpha_1 - 1)] ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}} \quad d_2^* = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \int_t^T [r(s) - q(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s)] ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}}$$

这里  $N(\cdot)$  为标准正态分布的累积概率密度函数。

证明 在风险中性的等价鞅测度  $Q$  下, 根据 Itô 引理, 有

$$S(T) = S(t) \exp \left\{ \int_t^T (r(s) - q(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s)) ds + \int_t^T \sigma(s) dW^Q(s) \right\}$$

因此

$$S^{\alpha_1}(T) = S^{\alpha_1}(t) \exp \left\{ \alpha_1 \int_t^T (r(s) - q(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s)) ds + \alpha_1 \int_t^T \sigma(s) dW^Q(s) \right\} =$$

$$S_t^{\alpha_1} \exp \left\{ \int_t^T \left[ \alpha_1 (r(s) - q(s)) + \frac{\alpha_1^2 - \alpha_1}{2} \sigma^2(s) \right] ds \right\} \cdot \xi_t$$

其中

$$\xi_t = \exp \left\{ \int_t^T - \frac{1}{2} \alpha_1^2 \sigma^2(s) ds + \int_t^T \alpha_1 \sigma(s) dW^Q(s) \right\}$$

作测度和布朗运动变换:

$$dR = \xi_t dQ$$

$$dW^R(s) = dW^Q(s) - \alpha_1 \sigma(s) ds$$

则  $R$  是另一种与  $Q$  等价的, 风险中性的概率测度。在  $R$  下, 标的资产价格遵循如下的微分方程:

$$dS(t) = (r(t) - q(t) + \alpha_1 \sigma^2(t)) S(t) dt + \sigma(t) S(t) dW^R(t)$$

因此, 在  $R$  下, 标的资产价格动态变化为:

$$S_T^{\alpha_1} = S_t^{\alpha_1} \exp \left\{ \int_t^T \left( \alpha_1 r(s) - \alpha_1 q(s) + \left( \alpha_1^2 - \frac{1}{2} \alpha_1 \right) \sigma^2(s) \right) ds + \int_t^T \alpha_1 \sigma(s) dW^R(s) \right\}$$

其中,  $W^R$  表示  $R$  下的标准的布朗运动。根据随机分析中的 Girsanov 定理, 有两个结论: (1) 在风险中性的概率测度  $Q$  下, 相对于一个自然滤波  $F_t$ ,  $\xi_T$  是鞅过程; (2) 风险中性的概率测度  $Q$  下,  $\xi_T I_A$  的期望值可以转化为风险中性的概率测度  $R$  下示性函数  $I_A$  的期望值, 即

$$E^Q [\xi_T I_A | F_t] = E^R [I_A | F_t] = P^R(A)$$

因此, 有

$$E^Q [S_T^\alpha I_A | F_t] = S_t^\alpha \exp \left\{ \int_t^T \left[ \alpha_1 (r(s) - q(s)) + \frac{\alpha_1^2 - \alpha_1}{2} \sigma^2(s) \right] ds \right\} \cdot E^Q [\xi_T I_A | F_t] = S_t^\alpha \exp \left\{ \int_t^T \left[ \alpha_1 (r(s) - q(s)) + \frac{\alpha_1^2 - \alpha_1}{2} \sigma^2(s) \right] ds \right\} \cdot E^R [I_A | F_t] = P^R(S_T > K) = S_t^{\alpha_1} \exp \left\{ \int_t^T \left[ \alpha_1 (r(s) - q(s)) + \frac{\alpha_1^2 - \alpha_1}{2} \sigma^2(s) \right] ds \right\} \cdot P^R \left\{ \ln S_T + \int_t^T \left[ (r(s) - q(s)) + \frac{1}{2} \sigma^2(s) (2\alpha_1 - 1) \right] ds + \int_t^T \sigma(s) dW^R(s) > \ln K \right\} = S_t^{\alpha_1} \exp \left\{ \int_t^T \left[ \alpha_1 (r(s) - q(s)) + \frac{\alpha_1^2 - \alpha_1}{2} \sigma^2(s) \right] ds \right\} \cdot P^R \left\{ - \frac{\int_t^T \sigma(s) dW^R(s)}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}} < \right.$$

$$\left. \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \int_t^T \left[ (r(s) - q(s)) + \frac{1}{2} \sigma^2(s) (2\alpha_1 - 1) \right] ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}} \right\} = S_t^{\alpha_1} \exp \left\{ \int_t^T \left[ \alpha_1 (r(s) - q(s)) + \frac{\alpha_1^2 - \alpha_1}{2} \sigma^2(s) \right] ds \right\} N(d_1^*)$$

在这里,利用了布朗运动服从正态分布的性质,即

$$\int_t^T \sigma(s) dW^R(s) \sim N\left(0, \int_t^T \sigma^2(s) ds\right)$$

因此,引理2中的(1)得证。(2)的证明完全类似:

$$E^Q [K^\alpha I_A | F_t] = K^\alpha \cdot E^Q [I_A | F_t] = K^\alpha \cdot P^Q(S_T > K) = K^\alpha \cdot P^Q \left\{ - \frac{\int_t^T \sigma(s) dW^R(s)}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}} < \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \int_t^T \left[ r(s) - q(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) \right] ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s) ds}} \right\} = K^\alpha N(d_2^*)$$

根据引理2,可以得幂函数族期权的定价公式,即定理3与定理4。

**定理3** 若标的资产的价格遵循(1)式,则幂函数族买权现今的合理价格为

$$C_\alpha = - \int_t^T r(s) ds \left[ S_t^{\alpha_1} \exp \left\{ \int_t^T \left[ \alpha_1 (r(s) - q(s)) + \frac{\alpha_1^2 - \alpha_1}{2} \sigma^2(s) \right] ds \right\} \cdot N(d_1^*) - K^\alpha N(d_2^*) \right]$$

**定理4** 若标的资产的价格遵循几何布朗运动(1)式,则幂函数族卖权  $P_\alpha = \max(K^\alpha - S_T^{\alpha_1}, 0)$  现今的合理价格为

$$P_\alpha = - \int_t^T r(s) ds \left[ K^\alpha N(-d_2^*) - S_t^{\alpha_1} \exp \left\{ \int_t^T \left[ \alpha_1 (r(s) - q(s)) + \frac{\alpha_1^2 - \alpha_1}{2} \sigma^2(s) \right] ds \right\} N(-d_1^*) \right]$$

定理3和定理4是更一般的幂函数族期权的定价公式。幂函数族期权会因参数  $\alpha_1$  的不同设定而产生了不同的权证。选取不同的  $\alpha_1$  值,则得到不同的期权及定价公式。当  $\alpha_1 = 1$  时,就得到了著名的 Black-Scholes 欧式期权定价公式。

### 3 结束语

本文对幂函数族创新期权定价问题进行了分析和研究。在前人工作的基础上,假设无风险利率  $r(t)$ 、股票的期望收益率  $\mu(t)$  以及波动率  $\sigma(t)$  都为时间  $t$  的连续函数情况下,利用鞅理论方法,给出了 O-U 过程模型下欧式幂函数族期权定价公式;并对原有的方法进行了改进和推广,得到更一般的结果;这更符合现实的金融市场,对投资者具有一定的理论指导意义和实际应用价值。

#### 参考文献:

- [1] 田存志. 幂函数族之权证创新及定价——一种基于鞅定价的分析方法[J]. 预测, 2004, 23(4): 68-71.
- [2] 潘坚, 郭豫芳. 非风险中性意义下幂函数族期权定价模型[J]. 长春师范学院学报, 2007, 26(5): 15-17.
- [3] 马惠馨, 薛红, 杨珊. 分数布朗运动下认股权证的保险精算定价[J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2010, 23(5): 527-529.
- [4] 林建华, 王福昌, 冯净海. 股价波动的指数 O-U 过程模型[J]. 经济数学, 2000, 17(4): 29-32.
- [5] 郑晓阳, 刘兆鹏. 基于 O-U 过程的具有不确定执行价格的期权定价[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2008, 29(11): 1232-1235.
- [6] 杨珊, 薛红, 马惠馨. 分数跳-扩散下两值期权定价[J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2010, 23(4): 391-393.

## Pricing Power-function Options Under the Ornstein-Uhlenbeck Process

LIU Zhao-peng, ZHANG Zeng-lin

(School of Mathematics and Statistics, Suzhou College, Suzhou 234000, China)

**Abstract:** In order to make the stock market model closer to the actual situation, we assume that stock-price process is driven by O-U process, which can reflect fluctuation in the appreciation rate of the stock. Exponential O-U process model can overcome some defects of traditional exponential Brownian motion model, and stains some more graceful properties. The unique equivalent martingale measure of this model is found by using the Girsanov theorem. Under the stochastic model of exponential O-U process, the pricing formulas of power-function options with continuous dividend are obtained by martingale method.

**Key words:** O-U process; martingale method; power-function options; continuous dividend