

有优先权 4 部件冷贮备 Markov 可修系统的可靠性分析

梁丽丹, 张民悦

(兰州理工大学理学院, 兰州 730050)

摘 要:研究了有优先使用权和优先维修权的 4 个不同型部件组成的冷贮备 Markov 可修系统。在转换开关完全可靠的情形下建立了系统模型。当系统各部件的工作寿命服从不同参数的指数分布时, 通过计算与推导给出了该系统的稳态可靠性指标和稳态情形下可靠性指标的均值的表达式。

关键词:冷贮备 Markov 可修系统; 优先使用和维修权; 可靠性指标

中图分类号: O213. 2

文献标识码: A

引 言

贮备系统分为冷贮备系统和温贮备系统, 所谓冷贮备系统是指贮备的部件在贮备期内不失效也不劣化, 贮备期的长短对以后使用时的工作寿命没有影响。贮备部件替换失效部件是通过转换开关实现的, 假定开关转换是在瞬间完成的。在文献[1-4]中, 仅讨论了 2 个不同型部件组成的冷贮备系统的可靠性, 在文献[5]中, 讨论了一些冷贮备的几何模型。我们对有优先使用权和优先维修权的 4 个不同型部件组成的冷贮备 Markov 可修系统, 在转换开关完全可靠的情形下建立了系统模型, 当部件的工作寿命服从不同参数的指数分布时, 计算出了系统可靠型的稳态指标和平均指标的表达式。

1 系统基本假定

假定 1^[3-4] 系统由四个不同型部件, 一个完全可靠的转换开关和一个修理设备组成。部件 1 比部件 2 有优先权(优先使用权和优先修理权), 部件 2 比部件 3 有优先权, 部件 3 比部件 4 有优先权, 当部件 1 发生故障时, 部件 2 立即从贮备状态进入工作状态, 修理设备立即修理部件 1; 当故障的部件 1 被修理好时, 立即进入工作状态, 其他部件则暂停工作进入贮备状态或修理状态; 当部件 2 发生故障时, 部件 3 立即从贮备状态进入工作状态, 部件 2 则进入待修状态; 部件 3 发生故障时, 部件

4 立即从贮备状态进入工作状态, 部件 3 进入待修状态。部件间的转换是通过完全可靠的转换开关在瞬间转换完成的。

假定 2 部件在贮备期间不会发生故障, 在同一瞬间 2 个部件都发生故障的概率可忽略不计, 且故障部件可修复如新。

假定 3 设第 i 个部件的工作寿命分布为 $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, 故障后的修理时间分布为 $Y_i(t) = 1 - e^{-\mu_i t}$, 其中 $\lambda_i > 0, \mu_i > 0, t \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$ 。

假定 4 在 $t = 0$ 时刻, 四个部件都是新的, 部件 1 开始工作。

2 系统状态分析

由于指数分布的无记忆性, 部件 2, 3, 4 从贮备状态进入工作状态时, 其工作寿命分布总是 $1 - e^{-\lambda_i t}, \lambda_i > 0, t \geq 0, i = 2, 3, 4$ 与之前是否工作过或曾经工作多长时间无关; 同样, 部件 2, 3, 4 从待修状态进入修理状态时, 其修理时间分布总是 $1 - e^{-\mu_i t}, \mu_i > 0, t \geq 0, i = 2, 3, 4$, 与之前是否修理过或曾经修理过多长时间无关。

令 $N(t)$ 为该系统在 t 时刻所处的状态, 则系统的可能状态为^[5-6]:

0 t 时刻, 部件 1 工作, 部件 2, 3, 4 贮备, 系统正常。

1 t 时刻, 部件 1 工作, 部件 2 修理, 部件 3, 4 贮

收稿日期: 2011-03-09

基金项目: 甘肃省自然科学基金(3ZS042-B25-016)

作者简介: 梁丽丹(1985-) , 女, 河南洛阳人, 硕士生, 主要从事运筹学与控制论方面的研究。

备,系统正常。

2 t时刻,部件1工作,部件2修理,部件3待修,部件4贮备,系统正常。

3 t时刻,部件1工作,部件2修理,部件3,4待修,系统正常。

4 t时刻,部件1修理,部件2工作,部件3,4贮备,系统正常。

5 t时刻,部件1修理,部件2待修,部件3工作,部件4贮备,系统正常。

6 t时刻,部件1修理,部件2,3待修,部件4工作,系统正常。

7 t时刻,部件1修理,部件2,3,4待修,系统故障。

易知 $\{N(t) | t \geq 0\}$ 构成了一个连续有限齐次 Markov 链,其状态空间为:

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad F = \{7\}$$

得出在 Δt 时间内状态的转移概率矩阵 A 为:

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_2 - \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ \mu_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 - \lambda_2 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 - \lambda_3 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu - \lambda & \lambda_4 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

3 系统可靠性指标

通过解方程组

$$\begin{cases} (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7)A = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 = 1 \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} \pi_0 = 0 = \pi_1 = \pi_2 = \pi_4 = \pi_5 = \pi_6 \\ \pi_3 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \\ \pi_7 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \end{cases}$$

因此,可得系统可靠性的稳态指标和平均指标为^[1-2]:

系统的可用度

$$A = \sum_{j \in W} \pi_j = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}$$

系统的稳态故障频度^[1]

$$M = \sum_{i \in W} \pi_i \sum_{j \in F} a_{ij} = \pi_3 \lambda_1 + \pi_6 \lambda_4 = \frac{\lambda_1 \mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}$$

系统的平均开工时间

$$MUT = \frac{A}{M} = \frac{1}{\lambda_1}$$

系统的平均停工时间

$$MDT = \frac{\bar{A}}{M} = \frac{1}{\mu_1}$$

系统平均周期

$$MCT = \frac{1}{M} = \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_1 \mu_1}$$

稳态概率

$$B = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 = 1$$

系统首次故障前平均时间 MTTFF 求解:

$$B = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_2 - \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 - \lambda_2 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 - \lambda_3 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu - \lambda & \lambda_4 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu - \lambda \end{bmatrix}$$

解方程组

$$\begin{cases} (P_0(t), \dots, P_6(t)) = (P_0(t), \dots, P_6(t))B \\ (P_0(\Delta t), \dots, P_6(\Delta t)) = (1, 0, \dots, 0) \end{cases}$$

对该方程组进行 Laplace 变换^[7],得到

$$\begin{cases} sP_0(s) - 1 = -\lambda_1 P_0(s) + \mu_2 P_1(s) + \mu_1 P_4(s) \\ sP_1(s) = -(\mu_2 + \lambda_1) P_1(s) + \mu_1 P_5(s) \\ sP_2(s) = -\lambda_1 P_2(s) + \mu_1 P_6(s) \\ sP_3(s) = -\lambda_1 P_3(s) \\ sP_4(s) = \lambda_1 P_0(s) - (\mu_1 + \lambda_2) P_4(s) \\ sP_5(s) = \lambda_1 P_1(s) + \lambda_2 P_4(s) - (\mu_1 + \lambda_3) P_5(s) \\ sP_6(s) = \lambda_1 P_2(s) + \lambda_3 P_5^*(s) - (\mu_1 + \lambda_4) P_6(s) \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} P_0^*(s) = \frac{(s + \mu_1 + \lambda_2)g}{(s + \lambda_1)(s + \mu_1 + \lambda_2)g - \mu_1\mu_2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_1g} \\ P_1(s) = \frac{\lambda_1\lambda_2\mu_1}{(s + \lambda_1)(s + \mu_1 + \lambda_2)g - \mu_1\mu_2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_1g} \\ P_2(s) = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\mu_1(s + \mu_2 + \lambda_1)}{[(s + \mu_1 + \lambda_4)(s + \lambda_1) - \lambda_1\mu_1][(s + \lambda_1)(s + \mu_1 + \lambda_2)g - \mu_1\mu_2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_1g]} \\ P_3(s) = 0 \\ P_4(s) = \frac{\lambda_1g}{(s + \lambda_1)(s + \mu_1 + \lambda_2)g - \mu_1\mu_2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_1g} \\ P_5(s) = \frac{\lambda_1\lambda_2(s + \mu_2 + \lambda_1)}{(s + \lambda_1)(s + \mu_1 + \lambda_2)g - \mu_1\mu_2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_1g} \\ P_6(s) = \frac{(s + \lambda_1)\lambda_1\lambda_2\lambda_3(s + \mu_2 + \lambda_1)}{[(s + \mu_1 + \lambda_4)(s + \lambda_1) - \lambda_1\mu_1][(s + \lambda_1)(s + \mu_1 + \lambda_2)g - \mu_1\mu_2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_1g]} \end{cases}$$

其中 $g = (\mu_1 + \lambda_3)(\mu_2 + \lambda_1) - \lambda_1\mu_1 = \mu_1\mu_2 + \lambda_3\mu_2 + \lambda_3\lambda_1$ 对解得方程组做 Laplace 反演变换,得到

$$\begin{aligned} P_0(t) &= \sum_{i=1}^2 \frac{(s_i + \mu_1 + \lambda_2)g}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 (s_i - s_j)} e^{s_i t} \\ P_1(t) &= \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_1\lambda_2\mu_1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 (s_i - s_j)} e^{s_i t} \\ P_2(t) &= \sum_{i=1}^4 \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\mu_1(s_i + \mu_2 + \lambda_1)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 (s_i - s_j)} e^{s_i t} \\ P_3(t) &= 0 \\ P_4(t) &= \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_1g}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 (s_i - s_j)} e^{s_i t} \\ P_5(t) &= \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_1\lambda_2(s_i + \mu_2 + \lambda_1)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 (s_i - s_j)} e^{s_i t} \\ P_6(t) &= \sum_{i=1}^4 \frac{(s_i + \lambda_1)\lambda_1\lambda_2\lambda_3(s_i + \mu_2 + \lambda_1)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 (s_i - s_j)} e^{s_i t} \end{aligned}$$

其中 s_1, s_2 是方程

$$(s + \lambda_1)(s + \mu_1 + \lambda_2)g - \mu_1\mu_2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_1g = 0$$

即 $s^2g + s(\mu_1 + \lambda_1 + \lambda_2)g + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\mu_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$ 的两根, s_3, s_4 是方程 $(s + \mu_1 + \lambda_4)(s + \lambda_1) - \lambda_1\mu_1 = 0$ 即 $s^2 + s(\mu_1 + \lambda_4 + \lambda_1) + \lambda_1\lambda_4 = 0$ 的两根,用 MATLAB 计算, s_1, s_2, s_3, s_4 都小于 0, 则最终得到系统的可靠度

$$R(t) = \sum_{i=0}^6 P_i(t) = \sum_{i=1}^2 \frac{(s_i + \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)g + \lambda_1\lambda_2(s_i + \mu_1 + \mu_2 + \lambda_1)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 (s_i - s_j)} e^{s_i t} +$$

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3(s_i + \mu_2 + \lambda_1)(s_i + \lambda_1 + \mu_1)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 (s_i - s_j)} e^{s_i t}$$

另外, $R^*(s) = \sum_{i \in w} P_i^*(s)$, 此时将故障状态作为吸收状态重新构造了一个带有唯一吸收态的 Markov 过程, 系统首次故障前的平均时间

$$\begin{aligned} MTTFF &= \lim_{s \rightarrow 0} R^*(s) = \\ &= \frac{(\mu_1\mu_2 + \lambda_3\mu_2 + \lambda_1\lambda_3)(\mu_1 + \lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_3\mu_2 + \lambda_1\lambda_3)} + \\ &= \frac{\lambda_3(\mu_2 + \lambda_1)(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_1\lambda_4(\lambda_3\mu_2 + \lambda_1\lambda_3)} + \frac{\mu_1 + \mu_2 + \lambda_1}{\lambda_3\mu_2 + \lambda_1\lambda_3} + \\ &= \frac{\lambda_4(\mu_1\mu_2 + \lambda_3\mu_2 + \lambda_1\lambda_3)(\mu_1 + \lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2\lambda_4(\lambda_3\mu_2 + \lambda_1\lambda_3)} + \\ &= \frac{\lambda_2\lambda_3(\mu_2 + \lambda_1)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\lambda_2\lambda_4(\mu_1 + \mu_2 + \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2\lambda_4(\lambda_3\mu_2 + \lambda_1\lambda_3)} \end{aligned}$$

用不同方法计算 MTTFF.

定理 1 当给定系统初始状态分布 $Q_w(0)$, 则 $MTTFF = x_0 + x_1 + \dots + x_k$. 其中 x_0, x_1, \dots, x_k 满足线性方程组 $(x_0, x_1, \dots, x_k)B = -Q_w(0)$.

用定理 1 求系统的 MTTFF. 时刻 0 四个部件都正常, 解方程组^[8]

$$(x_0, x_1, \dots, x_6) \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_2 - \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 - \lambda_2 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 - \lambda_3 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 - \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

用克拉默法则和行列式的性质计算

$$\begin{aligned}
MTTF = x_0 + x_1 + \dots + x_6 = & \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ -1 & -\mu_2 - \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ -1 & 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 - \lambda_2 & \lambda_2 & 0 \\ -1 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 - \lambda_3 & \lambda_3 \\ -1 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 - \lambda_4 \end{vmatrix} = \\
& \begin{vmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_2 - \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 - \lambda_2 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 - \lambda_3 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 - \lambda_4 \end{vmatrix} = \\
& \frac{\lambda_4(\mu_1\mu_2 + \lambda_3\mu_2 + \lambda_1\lambda_3)(\mu_1 + \lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_2\lambda_3(\mu_2 + \lambda_1)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\lambda_2\lambda_4(\mu_1 + \mu_2 + \lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2\lambda_4(\lambda_3\mu_2 + \lambda_1\lambda_3)}
\end{aligned}$$

4 结论

特别,当参数 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ 时,所研究的内容可视为有优先权的 4 个相同部件组成的冷贮备 Markov 可修系统。

参考文献:

[1] 曹晋华,程侃. 可靠性数学引论[M]. 北京: 科学出版社,1986.
[2] 程侃. 寿命分布类与可靠性数学理论[M]. 北京: 科学出版社,1999.
[3] 李才良,蒲冰远,唐应辉,等. 两不同部件冷贮备系统的可靠性分析[J]. 电子科技大学学报, 2003, 32(4): 447-450.

[4] 吴清太. 开关寿命连续型冷贮备可修系统的可靠性分析: 两不同部件构成的可修系统[J]. 运筹与管理, 2001, 10(1): 115-120.
[5] 王冠军,张元林. 有优先维修和优先使用的冷贮备系统的几何过程模型[J]. 经济数学, 2005, 22(1): 42-49.
[6] 樊剑武,赵晓华,李旭红,等. M/M/1/N 单重工作休假排队系统的性能分析[J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2009, 22(3): 113-116.
[7] 谢焕田,吴艳. 拉普拉斯方程有限差分法的 MATLAB 实现[J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(3): 1-2.
[8] 数学手册编写组. 数学手册[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979.

Reliability Analysis of Four-component Cold Maintainable Markov System with Priority

LIANG Li-dan, ZHANG Min-yue

(School of Science, Lanzhou University of Science and Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: In this paper, we presented a reliability analysis which was made of the four-component cold maintainable system with priority and a repair equipment. A maintainable model of this system was set up under the condition that the switch was absolutely reliable. The steady-state index and reliability indexes mean in the steady-state circumstances were obtained.

Key words: cold maintainable Markov system; right of priority and repair; reliability indexes