

# 一类热传导方程源项识别反问题

巫良杰

(成都理工大学应用数学系, 成都 610059)

摘要: 文章讨论了在有界区域里只含空间变量的一维热传导方程的源项识别问题。通过附加数据, 采用拟可逆正则化方法对问题进行求解, 得到了该问题的一个正则解, 并给出了正则解与精确解之间的误差估计。

关键词: 热传导方程; 源项识别; 正则化; 误差估计

中图分类号: O175.26

文献标识码: A

## 引言

源项识别问题就是通过关于解的附加信息, 尽可能求得问题的解。该问题中的非齐次项(源项)在不同的实际问题中有不同的意义: 在确定地下水污染问题中, 其代表污染源<sup>[1]</sup>; 在热传导问题中代表热源。源项识别问题在 Hadamard 意义下是一个不适定问题, 即问题的解不连续依赖于原始数据, 故给求解过程带来诸多困难<sup>[2]</sup>。从 20 世纪 70 年代开始, 很多学者对该问题进行了深入的研究, 大多数学者采用了数值算法: 如有限差分方法, 网格法, 边界元方法, 迭代算法等。然而对于正则化方法, 在源项识别问题中却很少有学者对其进行严格的理论分析并给出误差估计。正则化方法是由 Tikhonov 于 1963 年为克服选择法和拟解法在实际应用中的局限而创造性提出的, 这一方法为处理不适定问题奠定了坚实而广泛的理论基础<sup>[3-4]</sup>。

## 1 问题分析及求解

考虑一维热传导方程,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x) & 0 < x < 1, 0 < t \leq 1 \\ u(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

如果函数  $f(x)$  已知, 则该问题是典型的偏微分方程, 我们可以通过初边值条件计算出方程(1)的温度分布  $u = u(x, t)$ , 其解为:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-\tau)} d\tau \left( 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx \right) \sin n\pi x \quad (2)$$

然而在本文中要考虑的是热源函数  $f(x)$  未知, 通过一

定的附加数据, 从而求得  $f(x)$  需要的附加数据为时刻  $t = 1$  时的测量数据, 该数据给出形式:

$$u(x, 1) = g(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3)$$

从而由(1)式和(3)式便构成了热传导方程的源项识别问题。

由于此处的附加数据  $g(x)$  只能够通过测量得出, 并不精确。故假设测量数据函数  $g_\delta(x)$ 。满足:

$$\|g - g_\delta\| \leq \delta \quad (4)$$

这里的  $\delta > 0$  是一个误差水平,  $\|\cdot\|$  代表  $L^2(0, 1)$  空间的范数。

从而由(2)式可得:

$$u(x, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-n^2\pi^2}}{n^2\pi^2} (f, X_n) X_n \quad (5)$$

其中

$$\{X_n = \sqrt{2} \sin n\pi x \mid n = 1, 2, 3, \dots\} \quad (6)$$

$L^2(0, 1)$  中的正交基, 且

$$(f, X_n) X_n = \sqrt{2} \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx \quad (7)$$

通过附件数据(3)式, 定义一个算子  $A: f \rightarrow g$ , 从而可以得到:

$$g(x) = Af(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (g, X_n) X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-n^2\pi^2}}{n^2\pi^2} (f, X_n) X_n \quad (8)$$

由(8)式可得:

$$f(x) = A^{-1}g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{1 - e^{-n^2\pi^2}} (f, X_n) X_n \quad (9)$$

## 2 拟可逆正则化方法

利用拟可逆正则化方法给出问题(1)的一个正则

近似解。拟可逆正则化方法的基本思想是: 对问题 (1) 的第一个方程的左端加上一个小扰动, 将定解问题变为适定的, 用适定问题的解来构造原不适定问题的近似解。这里扰动的参数就是正则化参数, 在问题 (1) 的第一个方程的左端加上  $\mu f_{xx}$  项, 即:

$$u_t - u_{xx} + \mu f_{xx} = f(x) \quad 0 < x < 1 \quad 0 < t \leq 1 \quad (10)$$

拟可逆这种正则化思想是受到 Eldén 的启发, 在文献 [5] 中, Eldén 用这种正则化方法解决了逆热传导问题。考虑问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + \mu f_{xx} = f(x) \quad 0 < x < 1 \quad 0 < t \leq 1 \\ u(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq 1 \\ u(x, 1) = g_\delta(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (11)$$

这里  $\mu$  是正则化参数, 通过变量代换和分离变量法可以得到问题 (11) 的解, 即问题 (1) 的拟可逆正则解:

$$f_{\delta, \mu}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \mu^2 n^2)} (g_\delta, X_n) X_n \quad (12)$$

### 3 正则解的误差估计

因源项识别问题是不适定问题, 故假设热源函数  $f(x)$  存在先验界:

$$\|f\|_{H^p(0, 1)} \leq M \quad p \geq 0 \quad (13)$$

这里的  $M$  是一个大于 0 的常数,  $H^p(0, 1)$  定义为:

$$\|f\|_{H^p(0, 1)} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} (1 + n^2)^p |(f, X_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

定理 1 设  $f_{\delta, \mu}(x)$  是源项识别问题的拟可逆正则解,  $f(x)$  是该问题的精确解。测量数据  $g_\delta$  满足  $\|g - g_\delta\| \leq \delta$  且  $f(x)$  满足  $\|f\|_{L^2(0, 1)} \leq M \quad p \geq 0$ , 选取先验正则参数为  $\mu = \left(\frac{\delta}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$  则有

$$\|f(x) - f_{\delta, \mu}(x)\|_{L^2(0, 1)} \leq 2\pi^2 \delta^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2\pi^2} \max\left\{1, \left(\frac{\delta}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right)$$

证明 由三角不等式, 可以得到

$$\begin{aligned} \|f(x) - f_{\delta, \mu}(x)\|_{L^2(0, 1)} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (f, X_n) X_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \mu^2 n^2)} (g_\delta, X_n) X_n \right\|_{L^2(0, 1)} \leq \\ &\left\| \sum_{n=1}^{\infty} (f, X_n) X_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \mu^2 n^2)} (g, X_n) X_n \right\|_{L^2(0, 1)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \mu^2 n^2)} (g - g_\delta, X_n) X_n \right\|_{L^2(0, 1)} = \\ &\left\| \sum_{n=1}^{\infty} (f, X_n) X_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \mu^2 n^2)} (f, X_n) X_n \right\|_{L^2(0, 1)} + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \mu^2 n^2)} (g - g_\delta, X_n) X_n \Big\|_{L^2(0, 1)} \leq \\ &\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(1 + \mu^2 n^2)}\right) (1 + n^2)^{\frac{p}{2}} (1 + n^2)^{-\frac{p}{2}} (f, X_n) X_n \right\|_{L^2(0, 1)} + \\ &\sup_{x \geq 1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \mu^2 n^2)} \right) \\ &\| (g - g_\delta, X_n) X_n \|_{L^2(0, 1)} \leq \\ &\sup_{x \geq 1} \left( \left(1 - \frac{1}{(1 + \mu^2 n^2)}\right) (1 + n^2)^{-\frac{p}{2}} \right) M + \\ &\sup_{x \geq 1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{(1 - e^{-n^2 \pi^2})(1 + \mu^2 n^2)} \right) \delta \leq \\ &\max(\mu^p, \mu^2) M + \frac{2\pi^2}{\mu^2} \delta = \\ &\max\left\{ \left(\frac{\delta}{M}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{\delta}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} M + \pi^2 \left(\frac{\delta}{M}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &2\pi^2 \delta^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \max\left\{1, \left(\frac{\delta}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right) \end{aligned}$$

由于  $\|f(x) - f_{\delta, \mu}(x)\|_{L^2(0, 1)} \rightarrow 0$  (当  $\delta \rightarrow 0$ ) , 从而可用所求出的正则解  $f_{\delta, \mu}(x)$  近似替代源项识别问题的精确解  $f(x)$ 。

### 参考文献:

- [1] Li G S. Determining magnitude of groundwater pollution sources by data compatibility analysis [J]. Inverse Problems in Science and Engineering 2006 14: 287-300.
- [2] 肖庭延, 于慎根, 王彦飞. 反问题的数值解法 [M]. 北京: 科学出版社 2003.
- [3] 王彦飞. 反问题的计算方法及其应用 [M]. 北京: 高等教育出版社 2007.
- [4] Engl H W, Hanke M, Neu Bauer A. Regularization of inverse problem [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [5] Elden L. Approximations for a Cauchy problem for the heat equation [J]. Inverse Problems 1987 3: 263-273.

## An Inverse Problem of Source Term Identification for Heat Conduction Equation

WU Liang-jie

(Department of Applied Mathematics, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

**Abstract:** This paper discussed a source term identification problem of the one-dimensional heat conduction with only space variable in bounded regions. A regular solution of the inverse problem was obtained by quasi-reversible regularization method. Furthermore, error estimate was given between the regular solution and exact solution.

**Key words:** heat conduction equation; source term identification; regularization; error estimate