

# 具连续变量脉冲时滞差分方程的振动性

欧阳瑞, 陈春华

( 周口师范学院数学与信息科学系, 河南 周口 466000)

摘 要: 利用构造辅助方程的方法, 建立了无脉冲的具连续变量时滞差分方程与有脉冲具连续变量时滞差分方程在振动性上的等价性, 然后利用反证法、构造序列法和积分中值定理等方法, 研究了无脉冲的具连续变量时滞差分方程的振动性, 得到了方程所有解振动的两个充分性条件, 从而得到了具有连续变量脉冲时滞差分方程的所有解振动的两个充分性条件。

关键词: 脉冲时滞差分方程; 连续变量; 振动性

中图分类号: O175.7

文献标识码: A

## 引 言

脉冲现象在现代科技各领域中是普遍存在的, 其模型往往可总结为脉冲微分或差分系统。近年来, 具有连续变量的时滞差分方程得到了人们的广泛的研究<sup>[1-4]</sup>, 但已有文献对带有脉冲扰动的连续变量的差分方程的研究却并不多见<sup>[5-7]</sup>, 而这类方程在实际问题中是普遍存在的, 它综合了连续和离散系统的特征, 但又超出了连续和离散系统的范围。基于这种考虑, 本文研究了一类具有连续变量的脉冲时滞差分方程的振动性问题。

## 1 方程的描述及相关概念

考虑具连续变量脉冲时滞差分方程

$$\begin{cases} y(t) - y(t - \tau) + \sum_{i=1}^m p_i(t) y(t - \sigma_i) = 0, t \neq t_k \\ y(t_k) - y(t_k) = b_k y(t_k), k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$  是固定点列, 称为脉冲点, 且满足条件  $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$ , 其中  $p_i(t) \in C[0, +\infty) \rightarrow R, \tau > 0, \sigma_i > 0, b_k \neq -1 (k = 1, 2, \dots)$  是实常数。对任意  $t_0 \geq 0$ , 记  $r = \max\{\tau, \sigma_i\} (i = 1, 2, \dots, m)$ 。任给  $\phi \in C[t_0 - r, t_0] \rightarrow R$ , 如果  $y(t)$  在  $[t_0 - r, +\infty) - \{t_k, t_k + \tau, t_k + \sigma_i, k = 1, 2, \dots\}$  连续, 在点列  $t_k, t_k + \tau, t_k + \sigma_i (t_k > t_0)$  处左右极限都存在且左连续, 对任意  $t \in [t_0, +\infty)$  满足方程(1), 对  $t \in [t_0 - r, t_0]$  满足

$$y(t) = \phi(t), t \in [t_0 - r, t_0] \quad (2)$$

则称函数  $y: [t_0 - r, \infty) \rightarrow R$  为方程(1)的满足初始条件的解。由步法易知对任意  $t_0 \geq 0, \phi \in C[t_0 - r, t_0] \rightarrow R$ , 初始问题方程(1)、式(2)存在唯一解  $y(t; t_0, \phi)$ <sup>[5]</sup>。

方程(1)的解  $y(t)$  称为振动的, 如果它既非最终正解也非最终负解; 否则称其为非振动的。若一个方程的所有解都振动, 则称这个方程为振动的。

## 2 主要引理及证明

针对方程(1)构造辅助方程

$$x(t) - \prod_{t-\tau \leq t_i < t} (1 + b_k)^{-1} x(t - \tau) + \sum_{i=1}^m \prod_{t-\sigma_i \leq t_i < t} (1 + b_k)^{-1} p_i(t) x(t - \sigma_i) = 0 \quad (3)$$

方程(3)满足初始条件(2)式的解记为  $x(t)$ , 当  $t \in [t_0 - r, t_0]$  时,  $x(t) = \phi(t)$ , 当  $t \in [t_0, \infty)$  时,  $x(t)$  是几乎处处连续的, 是  $t_k (t_k > t_0)$  处右连续的函数。

首先建立方程(1)和方程(3)关于振动性的等价关系。

引理 1<sup>[5]</sup> (1) 若  $x(t) = x(t; t_0, \phi)$  是方程(3)的一个解, 则  $y(t) = \prod_{t_0 \leq t_i < t} (1 + b_k) x(t; t_0, \phi)$  是方程(1)的一个解。

(2) 若  $y(t) = y(t; t_0, \phi)$  是方程(1)的一个解, 则  $x(t) = \prod_{t_0 \leq t_i < t} (1 + b_k)^{-1} y(t; t_0, \phi)$  是方程(3)的一个解。

收稿日期: 2011-04-05

基金项目: 周口师范学院青年基金资助项目( zknqjn201027A)

作者简介: 欧阳瑞(1979-), 男, 河南许昌人, 讲师, 硕士生, 主要从事差分方程振动性方面的研究。

引理2<sup>[5]</sup> 若存在自然数  $K$ , 使得当  $k > K$  时有  $b_k > -1$ , 则方程(1)的所有解振动当且仅当方程(3)的所有解振动。

引理3<sup>[2]</sup> 设  $p_i > 0$   $k_i$  为正整数,  $i = 1, 2, \dots, m$ , 差分方程

$$x_{n+1} - x_n + \sum_{i=1}^m p_i x_{n-k_i} = 0 \tag{4}$$

有最终正解当且仅当差分不等式

$$x_{n+1} - x_n + \sum_{i=1}^m p_i x_{n-k_i} \leq 0 \tag{5}$$

有一个最终正解。

### 3 主要结论及证明

定理1 设  $b_k > 0$ , 对所有  $k = 1, 2, \dots$  成立, 若

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \prod_{t-\sigma_i \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} p_i(t) = p_i > 0$$

$$\sigma_i = k_i \tau + \theta_i, \rho \leq \theta_i < \tau$$

且  $\sum_{i=1}^m p_i \frac{k_i}{(k_i - 1)^{k_i-1}} > 1, i = 1, 2, \dots, m$  则方程(1)振动。

证明 由引理2, 只需证明方程(3)振动。运用反证法, 假设方程(3)存在最终正解  $x(t)$ , 则存在  $T > 0$  使得当  $t > T$  时有

$$x(t) > 0, x(t - \tau) > 0, x(t - \sigma_i) > 0$$

因为  $b_k > 0$ , 所以  $\prod_{t-\tau \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} \leq 1$ , 所以

$$x(t) - x(t - \tau) + \sum_{i=1}^m \prod_{t-\sigma_i \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} p_i(t) x(t - \sigma_i) \leq$$

$$x(t) - \prod_{t-\tau \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} x(t - \tau) +$$

$$\sum_{i=1}^m \prod_{t-\sigma_i \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} p_i(t) x(t - \sigma_i) = 0$$

即

$$x(t) - x(t - \tau) + \sum_{i=1}^m \prod_{t-\sigma_i \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} p_i(t) x(t - \sigma_i) \leq 0 \tag{6}$$

对式(6)两端从  $t - \tau$  到  $t$  积分得

$$\int_{t-\tau}^t x(s) ds - \int_{t-\tau}^t x(s - \tau) ds + \sum_{i=1}^m \prod_{t-\sigma_i \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} \int_{t-\tau}^t p_i(s) x(s - \sigma_i) ds \leq 0$$

由定理1条件可得

$$\int_{t-\tau}^t x(s) ds - \int_{t-\tau}^t x(s - \tau) ds + \sum_{i=1}^m p_i \int_{t-\tau}^t x(s - \sigma_i) ds \leq 0 \tag{7}$$

设  $y(t) = \int_{t-\tau}^t x(s) ds$ , 则当  $t$  充分大时

$$y'(t) = x(t) - x(t - \tau) \leq \sum_{i=1}^m \prod_{t-\sigma_i \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} p_i(t) x(t - \sigma_i) < 0$$

即  $y(t)$  是单调减小的, 所以

$$\int_{t-\tau}^t x(s - \sigma_i) ds = y(t - \sigma_i) =$$

$$y(t - k_i \tau - \theta_i) \geq y(t - k_i \tau) =$$

$$\int_{t-\tau}^t x(s - k_i \tau) ds$$

最终得

$$y(t) - y(t - \tau) + \sum_{i=1}^m p_i y(t - k_i \tau) \leq 0$$

取充分大的正数  $T$ , 令  $t_n = n\tau + T$ , 记

$$y(n\tau + T) = y_n, n = 1, 2, \dots;$$

即有  $y_n - y_{n-1} + \sum_{i=1}^m p_i y_{n-k_i} \leq 0, k = 1, 2, \dots$ , 说明数列  $\{y_n\}_{n=1}^\infty$  是差分不等式(5)的一个最终正解, 由引理3知差分方程(4)有一个最终正解。由文献[2]的定理1知, 定理条件成立时, 方程(4)没有最终正解, 这是个矛盾, 故方程(1)是振动的。

定理2 设  $b_k > 0$ , 对所有  $k = 1, 2, \dots$  成立,  $\sigma_i \geq 2\tau, i = 1, 2, \dots, m$ , 如果

$$\sum_{i=1}^m \liminf_{t \rightarrow \infty} \prod_{t-\sigma_i \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} p_i(t) = \alpha > 0 \tag{8}$$

且存在一个非负单增数列  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$ , 使得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} [ \min_{s \in [t_n, t_n + \tau]} \{ \prod_{t-\sigma_i \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} p_i(s) \} ] > 1 - \alpha \tag{9}$$

则方程(1)是振动的。

证明 由引理2, 只需证明方程(3)振动。用反证法, 假设方程(3)存在最终正解  $x(t)$ , 则存在  $T_1 > 0$ , 使得当  $t > T_1$  时有

$$x(t) > 0, x(t - \tau) > 0, x(t - \sigma_i) > 0$$

因为  $b_k > 0$ , 所以  $\prod_{t-\tau \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} \leq 1$ , 所以

$$x(t) - x(t - \tau) + \sum_{i=1}^m \prod_{t-\sigma_i \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} p_i(t) x(t - \sigma_i) \leq$$

$$x(t) - \prod_{t-\tau \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} x(t - \tau) +$$

$$\sum_{i=1}^m \prod_{t-\sigma_i \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} p_i(t) x(t - \sigma_i) = 0$$

即

$$x(t) - x(t - \tau) + \sum_{i=1}^m \prod_{t-\sigma_i \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} p_i(t) x(t - \sigma_i) \leq 0 \tag{10}$$

由式(8)知  $\forall \varepsilon \in [0, \alpha), \exists T_2 > T_1 + \sigma_i, i = 1, 2, \dots, m$ , 使得当  $t > T_2$  时有

$$\sum_{i=1}^m \prod_{t-\sigma_i \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} p_i(t) \geq \alpha - \varepsilon$$

记  $T = \max\{T_1, T_2\}$ , 对(10)式两端同时从  $t - \tau$  到  $t$  积

分, 并利用积分中值定理可得

$$\int_{t-\tau}^t x(s) ds - \int_{t-\tau}^t x(s-\tau) ds + \sum_{i=1}^m \prod_{t-\sigma_i \leq \xi_i < t} (1+b_k)^{-1} p_i(\xi_i) \int_{t-\tau}^t x(s-\sigma_i) ds \leq 0 \quad (11)$$

其中  $t > T, t - \tau < \xi_i, < t, i = 1, 2, \dots, m$ . 令

$$y(t) = \int_{t-\tau}^t x(s) ds \quad (12)$$

则有  $y(t) > 0$ , 在  $(T, +\infty)$  连续, 几乎处处可导, 且  $y'(t) < 0$ , 当  $t > T$  时, 有

$$y(t-2\tau) < y(t-\sigma_i) \quad (13)$$

由(11)式、(12)式和(13)式有

$$y(t-\tau) > \sum_{i=1}^m \prod_{t-\sigma_i \leq \xi_i < t} (1+b_k)^{-1} p_i(\xi_i) y(t-\sigma_i) > \sum_{i=1}^m \prod_{t-\sigma_i \leq \xi_i < t} (1+b_k)^{-1} p_i(\xi_i) y(t-2\tau) > (\alpha - \varepsilon) y(t-2\tau)$$

其中  $t > T, t - \tau < \xi_i, < t, i = 1, 2, \dots, m$ , 即

$$y(t) > (\alpha - \varepsilon) y(t-\tau), t > T + \tau \quad (14)$$

另一方面, 由(11)式-(14)式可得

$$(\alpha - \varepsilon) y(t-\tau) - y(t-\tau) + \sum_{i=1}^m \prod_{t-\sigma_i \leq \xi_i < t} (1+b_k)^{-1} p_i(\xi_i) y(t-\tau) \leq 0, t > T, t - \tau < \xi_i, < t, i = 1, 2, \dots, m$$

因为  $y(t) > 0$ , 即有

$$\alpha - \varepsilon - 1 + \sum_{i=1}^m \prod_{t-\sigma_i \leq \xi_i < t} (1+b_k)^{-1} p_i(\xi_i) \leq 0$$

由  $\varepsilon$  的任意性, 进而有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sum_{t-\tau < \xi_i < t} \prod_{t-\sigma_i \leq \xi_i < t} (1+b_k)^{-1} p_i(\xi_i) \leq 1 - \alpha$$

这与式(10)矛盾, 故方程(1)是振动的。

在定理 1 中不妨取  $k_i = 2, i = 1, 2, \dots, m$ , 则有  $\sigma_i = 2\tau + \theta_i \geq 2\tau$ , 同时有

$$\sum_{i=1}^m p_i \frac{k_i}{(k_i - 1)^{k_i-1}} = \sum_{i=1}^m p_i \frac{2^2}{(2-1)^{2-1}} = 4 \sum_{i=1}^m p_i > 1$$

即  $\sum_{i=1}^m p_i > \frac{1}{4}$ , 再结合定理 2, 可得如下推论:

推论 1 设  $b_k > 0$ , 对所有  $k = 1, 2, \dots$  成立,  $\sigma_i \geq 2\tau, i = 1, 2, \dots, m$ , 如果

$$\sum_{i=1}^m \liminf_{t \rightarrow \infty} \prod_{t-\sigma_i \leq \xi_i < t} (1+b_k)^{-1} p_i(t) > \frac{1}{4}$$

且存在一个非负单增数列  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$ , 使得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left[ \min_{s \in [t_n, t_n + \tau]} \left\{ \prod_{t-\sigma_i \leq \xi_i < t} (1+b_k)^{-1} p_i(s) \right\} \right] > \frac{3}{4}$$

则方程(1)是振动的。

参考文献:

[1] 毕平, 韩茂安. 具连续变量中立型差分方程的线性振动性[J]. 上海交通大学学报, 2004, 38(4): 646-649.  
 [2] 张玉珠, 燕居让. 具有连续变量的差分方程振动性的判据[J]. 数学学报, 1995, 38(3): 406-411.  
 [3] 杨甲山. 具有连续变量的高阶时滞差分方程的振动准则[J]. 河北师范大学学报, 2009, 33(2): 162-165.  
 [4] 邓春红, 冯春华. 一类时滞差分方程正周期解的存在性[J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2009, 22(1): 1-4.  
 [5] 蔡果兰, 宋淑红, 丁玮. 具有连续变量线性脉冲时滞差分方程的振动性[J]. 山西大学学报: 自然科学版, 2001, 24(3): 196-198.  
 [6] 蔡果兰, 郭继军, 王学保. 一类连续变量脉冲中立型差分方程[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(22): 190-192.  
 [7] 蔡果兰, 郭继军. 具有连续变量脉冲中立型时滞差分方程的振动性[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(11): 184-188.

### Oscillation for Impulsive Delay Difference Equations with Continuous Arguments

OUYANG Rui, CHEN Chun-hua

(College of Mathematics and Information Science, Zhoukou Normal University, Zhoukou 466000, China)

Abstract: First, constituted the equipollence between difference equations without impulses and difference equations with impulses on oscillation, by means of constructing assistant equations. Then, using reduction to absurdity, constructive sequence method and mean value theorem of integrals, studied oscillation for difference equations without impulses, two sufficient conditions on oscillation of all solutions are obtained. Accordingly, two sufficient conditions on oscillation for impulsive delay difference equations with continuous arguments are obtained.

Key words: impulsive delay difference equation; continuous argument; oscillation