

# 具有无流边界 $p(x)$ - Laplace 方程解的存在性

刘越里, 田玉柱, 何万生

(天水师范学院数学与统计学院, 甘肃 天水 741001)

**摘要:**利用山路引理和喷泉定理容易得到当  $p(x)$  - Laplace 方程有  $|u|^{p(x)-2}u$  项时, 方程解的存在性和多解性; 当方程没有  $|u|^{p(x)-2}u$  项时, 问题变得比较困难, 利用最小作用原理得到无流边界  $p(x)$  -

Laplace 方程解的存在性, 其中无流边界指的是 
$$\begin{cases} u = c, x \in \Omega \\ \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} ds = 0 \end{cases}$$

**关键词:**无流边界;  $p(x)$  - Laplace 方程; 最小作用原理

**中图分类号:**O175.29

**文献标识码:**A

## 引 言

近年来, 具有变指数问题的研究是一个很热的课题, 在非线性弹性力学和电子流变流体力学中有着重要的应用。在具  $p(x)$  增长性问题的研究中,  $p(x)$  - Laplacian 方程是其中比较重要的领域,  $p(x)$  - Laplacian 算子这里指的是  $-\text{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$ , 是  $p$  - Laplacian 算子的推广, 在本质上二者是有差别的, 如前者比后者具有更复杂的非线性性, 在一般情况下, 它是非齐次的。关于  $p(x)$  - Laplacian 方程的 Dirichlet 边值问题, Neumann 边值问题已有很多结果<sup>[1-2]</sup>。得到这些结果的主要方法是变分法, 上下解方法。本文主要考虑方程

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + f(x, u) = 0, x \in \Omega, u = c, x \in \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} ds = 0 \end{cases} \quad (1)$$

解的存在性, 其中  $\eta$  为单位外法向量,  $\Omega \subset R^N$  为有界区域,  $p(x) \in C(\bar{\Omega})$  且  $1 < p = \min_{\Omega} p(x) \leq p(x) \leq p^+ := \max_{\Omega} p(x)$ 。记  $X := W_0^{1,p(x)}(\Omega) \oplus R$ , 对  $u \in X$ , 记  $u = \bar{u} + \tilde{u}$ ,  $\bar{u} \in R, \tilde{u} \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), W_0^{1,p(x)}(\Omega) \xrightarrow{\text{紧}} L^{q(x)}(\Omega), 1 \leq q(x) < p^*(x)$ 。其中

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)}, & p(x) < N \\ \infty, & p(x) \geq N \end{cases}$$

当方程(1)有  $|u|^{p(x)-2}u$  项时, 利用山路引理和喷泉定理容易得到方程解的存在性和多解性; 当方程没有

$|u|^{p(x)-2}u$  项时, 问题变得困难些, 本文利用最小作用原理得到无流边界  $p(x)$  - Laplace 方程解的存在性。这里要用  $X$  的等价范数  $\|u\|_X = |\bar{u}| + \|\nabla \tilde{u}\|_{p(x)}, u \in X$ 。文中所用到的  $W_0^{1,p(x)}(\Omega), L^{p(x)}(\Omega)$  参见文献[3-6]。

## 1 基本定理

**假设 1** 假设  $f$  满足 Caratheodory 条件, 且满足  $(F_0) |f(x, t)| \leq \alpha + \beta |t|^{q(x)-1}, 1 < q(x) < q^*(x)$

考虑泛函:  $I(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} F(x, u) dx, u \in X$ , 其中  $F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$ 。由文献[4]可知  $I \in C^1(X, R)$ , 先给出方程(1)弱解的定义。

**定义 1** 如果对  $u \in X$ , 且满足:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} f(x, u) v dx &= 0, \\ \forall v \in X \end{aligned} \quad (2)$$

则称  $u$  是方程(1)的弱解。

定义 1 的合理性。一方面, 如果  $u$  在经典意义下满足(2)式, 则对  $v \in X$  有

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\Omega} \Delta_{p(x)} u v dx + \int_{\Omega} f(x, u) v dx = \\ &\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla v dx - v \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} ds + \\ &\int_{\Omega} f(x, u) v dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} f(x, u) v dx \end{aligned}$$

另一方面, 如果  $u \in X$  是(2)式的解, 取  $v \in C_0^\infty(\Omega) \subset X$  由散度定理可得  $-\Delta_{p(x)}u + f(x, u) = 0$  在  $\Omega$  中成立。另

收稿日期:2011-03-02

基金项目:甘肃省自然科学基金资助项目(096RJZE106)

作者简介:刘越里(1981-), 女, 甘肃天水人, 讲师, 硕士, 主要从事偏微分方程方面的研究。

外(2)式中再取  $v = 1$ , 有

$$\int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u dx + \int_{\Omega} f(x, u) dx = 0$$

对方程(1)第一个式子在  $\Omega$  上积分

$$-\int_{\Omega} \Delta_{p(x)} u dx + \int_{\Omega} f(x, u) dx = 0$$

再次利用散度定理有:

$$0 = -\int_{\Omega} \Delta_{p(x)} u dx = -\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} ds$$

因此边界条件  $\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} ds = 0$  成立。

### 2 主要结果

**定理 1**<sup>[7]</sup> 设  $(F_0)$  满足,若  $I$  有一个有界的极小化序列,则  $I$  有最小值点。

**定理 2** 设  $a \in R$ , 且对  $\forall x \in \Omega, \forall t \in R$ , 有  $0 \leq a < p - 1$ , 且下面条件满足:

$$(F_1) |f(x, t)| \leq C_1 + C_2 |t|^a$$

$$(F_2) |t| - \frac{ap^-}{p^- - 1} \int_{\Omega} F(x, t) dx \rightarrow +\infty, \text{ 当 } |t| \rightarrow \infty$$

则  $I$  有最小值点。

**证明** 容易知道  $I$  在  $X$  上弱下半连续。下证  $I$  强制。

$$I(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx +$$

$$\int_{\Omega} (F(x, u) - F(x, \bar{u})) dx + \int_{\Omega} F(x, \bar{u}) dx$$

其中第二部分

$$\int_{\Omega} (F(x, u) - F(x, \bar{u})) dx =$$

$$\left| \int_{\Omega} \int_0^1 f(x, \bar{u} + s\bar{u}(x)) \bar{u}(x) ds dx \right| \leq$$

$$\int_{\Omega} (C_1 + C_2 |\bar{u}|^a + C_3 |\bar{u}(x)|^a) |\bar{u}(x)| dx \leq$$

$$\int_{\Omega} C_1 |\bar{u}(x)| dx + \int_{\Omega} C_2 |\bar{u}|^a |\bar{u}(x)| dx +$$

$$\int_{\Omega} C_3 |\bar{u}(x)|^{a+1} dx \triangleq I + II + III$$

分别估计  $I, II, III$ 。其中

$$I = C_4 |\bar{u}|_{L^1(\Omega)} \leq C_5 |\bar{u}|_{L^{p^+}(\Omega)} \leq C_6 |\nabla \bar{u}|_{L^{p^+}(\Omega)}$$

$$III = C_3 |\bar{u}| \leq C_7 |\bar{u}|_{L^{a+1}(\Omega)} \leq C_8 |\nabla \bar{u}|_{L^{p^+}(\Omega)}$$

利用 Young 不等式有

$$II = C_2 \int_{\Omega} |\bar{u}|^a |\bar{u}(x)| dx \leq$$

$$C_2 \int_{\Omega} (\varepsilon |\bar{u}(x)|^{p^+} + C_9(\varepsilon) |\bar{u}|^{\frac{a+1}{p^+}}) dx \leq$$

$$\varepsilon C_{10} |\nabla \bar{u}|_{L^{p^+}(\Omega)} + C_{11} |\bar{u}|^{\frac{a+1}{p^+}} \leq$$

$$\frac{1}{2p^+} |\nabla \bar{u}|_{L^{p^+}(\Omega)} + C_{11} |\bar{u}|^{\frac{a+1}{p^+}}$$

由  $I, II, III$  得

$$I(u) \geq \frac{1}{p^+} |\nabla \bar{u}|_{L^{p^+}(\Omega)} - \frac{1}{p^+} - C_6 |\nabla \bar{u}|_{L^{p^+}(\Omega)} -$$

$$\frac{1}{2p^+} |\nabla \bar{u}|_{L^{p^+}(\Omega)} -$$

$$C_{11} |\bar{u}|^{\frac{a+1}{p^+}} - C_8 |\nabla \bar{u}|_{L^{p^+}(\Omega)} + \int_{\Omega} F(x, \bar{u}) dx \geq$$

$$C_{12} |\nabla \bar{u}|_{L^{p^+}(\Omega)} - C_{13} + |\bar{u}|^{\frac{a+1}{p^+}} (|\bar{u}|^{\frac{a+1}{p^+}} (\int_{\Omega} F(x, \bar{u}) dx - C_{11})) \tag{3}$$

在条件  $(F_2)$  下及(3)式可知泛函  $I$  强制,这样可得  $I$  有最小值点。即方程(1)有一弱解。

### 参考文献:

- [1] Fan X L.Solutions for  $p(x)$ - Laplacian Dirichlet problem with singular coefficients[J].JMAA.2005,312(3):464-477.
- [2] Mihailescu M.Existence and multiplicity of solutions for a Neumann problem involving  $p(x)$ - Laplacian Laplacian operator[J].NA.2007,67(5):1419-1425.
- [3] Fan X L,Zhao D.On the space  $L^{p(x)}(\Omega)$  and  $W^{m,p(x)}(\Omega)$  [J].JMAA,2001,63(2):424-446.
- [4] Fan X L,Shen J S,Zhao D.Sobolev embedding theorems for Spaces  $W^{k,p(x)}(\Omega)$  [J].JMAA,2001,62(2):749-760.
- [5] 刘越里,陈庆娥,田玉柱.具有无流边界条件的 Laplacian 算子的特征值[J].天水师范学院学报,2010,30(2):38-40.
- [6] 刘小兰.Hilbert 空间中伪单调变分不等式的严格可行性[J].四川理工学院学报:自然科学版,2010,20(2):144-146.
- [7] 张恭庆.临界点原理及其应用[M].上海:上海科学技术出版社,1986.

## Existence of Solution of $p(x)$ -Laplace Equation with No Flux Boundary

LIU Yue-li, TIAN Yu-zhu, HE Wan-sheng

(Department of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal College, Tianshui 741001, China)

**Abstract:** When a term of  $|u|^{p(x)-2}u$  is involved in  $p(x)$  -Laplace equation, it is easy to get the existence of solution and multiplicity of this equation using mountain pass theorem and fountain theorem. Otherwise, we apply the principle least action to obtain the existence of solution of  $p(x)$  -Laplace equation with no flux boundary, where no flux boundary is in the

following: 
$$\begin{cases} u = c, & x \in \Omega; \\ \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} ds = 0. \end{cases}$$

**Key words:** no flux boundary;  $p(x)$  -Laplace equation; principle of least action