

一类相依时序的两个重要分布

蒋莹莹

(四川理工学院理学院,四川 自贡 643000)

摘要: $\{X_i, i \geq 1\}$ 为平稳标准化正态时间序列,相关系数 $\rho_n = Cov(X_i, X_{i+n})$ 。文章在经典相依条件 $\rho_n \log n \rightarrow \rho \in (0, \infty)$ ($n \rightarrow \infty$) 下,得到了该时序的最大值和次最大值、次最大值和位置的两个分布。从结果可以发现,此时的次最大值和位置不是渐近独立。这些结果是经典极值理论定理 1、定理 2 的强相依情形的推广,对相依时序的统计方法有一定的意义。

关键词: 相依时序;第 k 个最大值;联合分布

中图分类号: 0212

文献标识码: A

引言

时间序列的方法因其在自然科学、社会科学领域的成功应用,一直以来都是概率的研究热点。通俗地讲,时间序列就是一列与离散记录时间有关的观测值。时序的最值问题在工程、金融研究中是非常重要的。设 $\{X_i, i \geq 1\}$ 为标准化的正态序列,相关系数 $\rho_{ij} = Cov(X_i, X_j)$ 。当 $\rho_{ij} = \rho_{|j-i|}$ 时称此序列为弱平稳的。

$X_n^{(1)} \geq X_n^{(2)} \geq \dots \geq X_n^{(n)}$ 是 X_1, X_2, \dots, X_n 的顺序统计量,习惯上记 $M_n^{(1)} = X_n^{(1)}, M_n^{(2)} = X_n^{(2)}$ 称为最大值和次最大值。文献[1]考虑了情形:当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\rho_{ij} = \rho_{|j-i|}, \rho_n \log n \rightarrow 0 \tag{1}$$

即 $\{X_i, i \geq 1\}$ 为弱相依平稳序列。

为方便叙述相关结论及本文证明,首先给出一些辅助条件。

$D'(u_n)$ 条件 如果对平稳随机变量序列 $\{X_j\}$ 和常数序列 $\{u_n\}$, 当 $k \rightarrow \infty$ 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=2}^{n/k} P\{X_1 > u_n, X_j > u_n\} \rightarrow 0$$

称 $\{X_j\}$ 满足 $D'(u_n)$ 条件。

$D_r(u_n)$ 条件 如果对上述 $\{X_j\}$, 任意选取 $i = (i_1, \dots, i_p), j = (j_1, \dots, j_p)$ 其中 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p < j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n, j_1 - j_p \geq l$ 成立, $|F_{i,j}(v, w) -$

$F_i(v)F_j(w)| \leq \alpha_{n,l}$, 其中 $v = (v_1, \dots, v_p), w = (w_1, \dots, w_p), v_i, v_j$ 均是在 r 个常数 $u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(r)}$ 中任意选取的,对序列 $l_n = o(n)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\alpha_{n,l} \rightarrow 0$, 则称 $\{X_j\}$ 满足 $D_r(u_n)$ 条件。

定理 1^[1] 设 $\{X_n\}$ 为弱相依平稳高斯序列, $M_n^{(1)}, M_n^{(2)}$ 是其最大值和次最大值, 且 $P\{a_n(M_n^{(1)} - b_n) \leq x\} \xrightarrow{w} G(x)$ 成立, " w " 表示弱收敛, $G(x)$ 是非退化的分布函数, 取 $u_n^{(k)} = x_k/a_n + b_n, k = 1, 2$, 在 $\{X_n\}$ 上 $D_2(u_n), D'(u_n^{(k)})$ 条件满足, 那么对 $x_1 > x_2$ 有

$$P\{a_n(M_n^{(1)} - b_n) \leq x_1, a_n(M_n^{(2)} - b_n) \leq x_2\} \rightarrow G(x_2)(\log G(x_1) - \log G(x_2) + 1)$$

其中 $G(x_2) > 0$, 当 $G(x_2) = 0$ 时, 该式右端为 0, 正规化常数:

$$a_n = (2 \log n)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

$$b_n = a_n - (2a_n)^{-1}(\log \log n + \log 4\pi) \tag{3}$$

定理 2^[1] 序列 $\{X_n\}$ 满足定理 1 中的条件, 对 $u_n^{(k)} = x_k/a_n + b_n, k = 1, 2, 3, 4, D_4(u_n), D'(u_n^{(k)})$ 条件成立, $M_n^{(2)}, L_n^{(2)}$ 为序列的次最大值和位置, 则可以得到其联合分布为

$$P\{\frac{1}{n}L_n^{(2)} \leq t, a_n(M_n^{(2)} - b_n) \leq x\} \rightarrow tG(x)(1 - \log G(x))$$

收稿日期:2011-04-12

基金项目:四川理工学院理学院自然科学研究项目(09LXYA02)

作者简介:蒋莹莹(1980-),女,四川自贡人,讲师,硕士,主要从事应用数学方面的研究。

x 为正, $0 < t \leq 1$ 。

本文的收敛性均指弱收敛。

关于 $\{X_i, i \geq 1\}$ 另外一种相依情形是, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\rho_{ij} = \rho_{|j-i|}, \rho_n \log n \rightarrow \gamma > 0 \tag{4}$$

此时称序列为强相依平稳序列。关于此种情形的序列已有许多研究^[1-5], 文献[2-3]考虑了 $\{X_i, i \geq 1\}$ 最大值与部分和的联合极限分布。特别是文献[1]用点过程的方法得到了满足(4)式的序列最大值的极限分布。文献[1]首先证明了满足(4)式的 $\{X_i, i \geq 1\}$ 时间正则化上超水平 $u_n = x/a_n + b_n$ 所形成的过程依分布收敛到 $(0, \infty)$ 上的 Cox 过程, 然后根据点过程的收敛性得到了最大值的渐近分布。

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k \{N(B_i) = k_i\}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^k \left\{ \frac{(m(B_i) \exp(-x-r+\sqrt{2rz}))^{k_i}}{k_i!} \exp\{-m(B_i)e^{-x-r+\sqrt{2z}}\} \right\} \phi(z) dz \tag{5}$$

$\{X_i, i \geq 1\}$ 为平稳标准化正态时间序列, 相关系数 $\rho_n = Cov(X_i, X_{i+n})$ 。文章在经典相依条件

$$\rho_n \log n \rightarrow \rho \in (0, \infty) \quad (n \rightarrow \infty) \tag{6}$$

得到了该时序的最大值和次最大值、次最大值和位置的两个分布。

1 基本引理

首先给出二维 Cox 过程的描述。本文 Cox 过程 N 是 Poisson 过程自然推广, 具有随机密度 $\exp(-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}\zeta)$, ζ 是标准化正态随机变量, 即 N 的分布为

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k \{N(B_i) = k_i\}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^k \left\{ \frac{(m(B_i) \exp(-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}z))^{k_i}}{k_i!} \times \exp\{-m(B_i) \exp(-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}z)\} \right\} \phi(z) dz \tag{7}$$

B_1, \dots, B_k 是不相交的波勒尔集, $m(\cdot)$ 代表勒贝格测度。

引理 1^[1] 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是标准正态随机变量, 相关系数 $\rho_i = Cov(X_k, X_{k+i})$, 且满足(6)式。取水平满足 $u_n^{(1)} \geq u_n^{(2)} \geq \dots \geq u_n^{(r)}, u_n^{(k)} = x_k/a_n + b_n, 1 \leq k \leq r, a_n, b_n$ 表达式见(2)式、(3)式。 N_n 为 X_1, X_2, \dots, X_n 时间正规化上超水平 $u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \dots, u_n^{(r)}$ 形成的点过程, 则 N_n 依分布收敛到定义在 $(0, \infty) \times R$ 上的二维 Cox 过程 N 。

引理 2^[1] 设 X_1, X_2, \dots, X_n 满足引理 1 的条件, 取 B_1, B_2, \dots, B_s 是波勒尔子集, 其边界的勒贝格测度为 0, 则对整数 $m_j^{(k)}$, 有

$$P\{N_n^{(k)}(B_j) = m_j^{(k)}, j = 1, 2, \dots, s, k = 1, 2, \dots, r\} \rightarrow P\{N^{(k)}(B_j) = m_j^{(k)}, j = 1, 2, \dots, s, k = 1, 2, \dots, r\}$$

2 主要结论及其证明

定理 3 取水平 $u_n^{(k)} (1 \leq k \leq r), u_n^{(1)} \geq u_n^{(2)} \geq \dots \geq u_n^{(r)}$, 且满足

$$P\{\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq u_n^{(k)}\} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-e^{-x_i-\gamma+\sqrt{2\gamma}z}\} \phi(z) dz \tag{8}$$

令 $S_n^{(k)}$ 为满足引理 1 的序列 X_1, X_2, \dots, X_n 上超 $u_n^{(k)}$ 的个数。则对 $k_1 \geq 0, \dots, k_r \geq 0$ 有下面结论成立

$$P\{S_n^{(1)} = k_1, S_n^{(2)} = k_1 + k_2, \dots, S_n^{(r)} = k_1 + k_2 + \dots + k_r\} \rightarrow \frac{\tau_1^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{(\tau_2 - \tau_1)^{k_2}}{k_2!} \cdot \dots \cdot \frac{(\tau_r - \tau_{r-1})^{k_r}}{k_r!} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(\sqrt{2\gamma}z - \gamma))^{k_1+k_2+\dots+k_r} \cdot \exp\{-e^{-x_i-\gamma+\sqrt{2\gamma}z}\} \phi(z) dz \tag{9}$$

证明 根据引理 2, (9) 式左端收敛到

$$P\{S^{(1)} = k_1, S^{(2)} = k_1 + k_2, \dots, S^{(r)} = k_1 + \dots + k_r\} \tag{10}$$

其中 $S^{(i)} = N^{(i)}([0, 1])$, 二维 Cox 过程 N 的定义如(7)式, 参照文献[1]定理 5.6.1 的证明, (10) 式等价于

$$\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_r)!}{k_1! k_2! \dots k_r!} \left(\frac{\tau_1}{\tau_r}\right)^{k_1} \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_r}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{\tau_r - \tau_{r-1}}{\tau_r}\right)^{k_r} \cdot P\{N^{(r)}((0, 1]) = k_1 + k_2 + \dots + k_r\}$$

根据 Cox 过程 N , 又有

$$P\{N^{(r)}((0, 1]) = k_1 + k_2 + \dots + k_r\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\exp(-x_r - \gamma + \sqrt{2\gamma}z))^{k_1+k_2+\dots+k_r}}{(k_1 + k_2 + \dots + k_r)!} \cdot \exp\{-e^{-x_i-\gamma+\sqrt{2\gamma}z}\} \phi(z) dz = \frac{[\exp(-x_r)]^{k_1+k_2+\dots+k_r}}{(k_1 + k_2 + \dots + k_r)!} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-\gamma + \sqrt{2\gamma}z)]^{k_1+k_2+\dots+k_r} \cdot \exp\{-e^{-x_i-\gamma+\sqrt{2\gamma}z}\} \phi(z) dz$$

简单带入即可完成定理 3 的证明。

定理 4 X_1, X_2, \dots, X_n 满足定理 1 的条件, 且(8)式对 $k = 1$ 成立, $u^{(k)} = x_k/a_n + b_n, k = 1, 2$ 满足 $D_2(u_n), D'(u_n^{(k)})$, 则对 $x_1 > x_2$ 有

$$P\{a_n(M_n^{(1)} - b_n) \leq x_1, a_n(M_n^{(2)} - b_n) \leq x_2\} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-x_2 - \gamma + \sqrt{2\gamma}z) - \exp(-x_1 - \gamma + \sqrt{2\gamma}z) + 1] \exp\{-e^{-x_i-\gamma+\sqrt{2\gamma}z}\} \phi(z) dz \tag{11}$$

证明 (11) 式的左端等于

$$P\{M_n^{(1)} \leq u_n^{(1)}, M_n^{(2)} \leq u_n^{(2)}\} =$$

$$P\{S_n^{(2)} = 0\} + P\{S_n^{(1)} = 0, S_n^{(2)} = 1\}$$

其中 $S_n^{(i)}$ 是 X_1, X_2, \dots, X_n 上超 $u_n^{(i)}$ 的数目。根据定理 4 的条件易知此时定理 1 的结论是成立的, 简单代入定理 1 的结论即可完成证明。

定理 5 X_1, X_2, \dots, X_n 是满足引理 1 的正态序列, 取水平 $u_n^{(k)} (1 \leq k \leq r), u_n^{(1)} \geq u_n^{(2)} \geq \dots \geq u_n^{(4)}, u^{(k)} = x_k/a_n + b_n, 1 \leq k \leq 4 (a_n, b_n$ 表达式见(2)式、(3)式) 满足混合条件 $D_4(u_n), D'(u_n^{(k)}), M_n^{(2)}$ 为序列的第二个最大值和 $L_n^{(2)}$ 为 $M_n^{(2)}$ 出现的位置, 则有下列结论成立。

$$P\left\{\frac{1}{n}L_n^{(2)} \leq t, a_n(M_n^{(2)} - b_n) \leq x\right\} \rightarrow \int_{-\infty}^x H(y, t) dy \tag{12}$$

$$H(y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1-t) \exp\{-y-\gamma+\sqrt{2\gamma z}\} \exp\{-(1-t)e^{-y-\gamma+\sqrt{2\gamma z}}\} \phi(z) dz \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t \exp\{-y-\gamma+\sqrt{2\gamma z}\} \exp\{-te^{-y-\gamma+\sqrt{2\gamma z}}\} \phi(z) dz + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-(1-t)e^{-y-\gamma+\sqrt{2\gamma z}}\} \phi(z) dz \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp\{-2y-2\gamma+2\sqrt{2\gamma z}\} \exp\{-te^{-y-\gamma+\sqrt{2\gamma z}}\} \phi(z) dz$$

证明 完全类似于文献[6]定理的证明。

参考文献:

[1] Leadbetter M R, Lindgren G, Rootzen H. Extremes and related properties of stationary sequences and processes [M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
 [2] Anderson C W, Turkman K F. The joint limiting distribution of sums and maxima of stationary sequences [J]. J. Appl. Probab., 1995, 28: 33-44.
 [3] Hsing Tailen. A note on the asymptotic independence of the sum and maximum of strongly mixing stationary random variables [J]. Ann. Probab., 1996, 23: 938-947.
 [4] 蒋莹莹, 蔺富明. 强相依非平稳序列上超点过程的收敛性 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(4): 26-28.
 [5] 蔺富明. 非平稳序列 $M_n^{(1)}$ 和 $M_n^{(2)}$ 的联合分布 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2010, 23(5): 513-51.
 [6] 蔺富明. 强相依非平稳序列位置和高度联合极限分布 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(6): 26-28.

Two Important Distributions of a Kind of Time Series

JIANG Ying-ying

(School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract: Let $\{X_i, i \geq 1\}$ be a standard normal time series with $\rho_n = Cov(X_i, X_{i+n})$. The paper obtained two distributions of the first maximum and the second maximum, the second maximum and its location under the condition $\rho_n \log n \rightarrow \rho \in (0, \infty) (n \rightarrow \infty)$. The results in the paper show the second maximum and its location aren't gradually independent, which are expansions of Theorem A and Theorem B in the classical extreme value theory.

Key words: strong dependent time series; the k th largest maximum; joint asymptotic distribution