

有限群的正规 p - 补的一些结论

陈德勤

(四川理工学院理学院, 四川 自贡 643000)

摘要:有限群的极小子群在群论研究中有很重要的地位。文章探讨极小子群对有限群的 p - 幂零性, 并得到: 设 P 是群 G 的 Sylow p - 子群, 满足 $\Omega_1(P \cap F(G)) \leq Z_\infty(G)$, 如果 $N_c(Z(P))$ 有一个正规 p - 补, 那么 G 有一个正规 p - 补; 若 G 还没有与 A_4 同构的主因子, 则 G 有一个正规 p - 补。

关键词:幂零性; p - 幂零的; 正规子群

中图分类号: O135

文献标识码: A

本文中所有群均为有限群。群的极小子群是一个素数阶子群, 如果是偶数阶的, 那么极小子群是 2 阶或 4 阶子群。Thompson J G^[1] 进一步推广了幂零的结论, 指出: 如果 p 是一个奇素数, P 是 G 的 Sylow p - 子群, 如果 $N_c(J(P))$ 和 $N_c(Z(P))$ 有正规 p - 补, 那么 G 有正规 p - 补。在 Thompson 的结论基础上, Zhang G^[2] 得到了: 设 P 是群 G 的 Sylow p - 子群满足 $\Omega_1(P) \leq Z(P)$, 如果 $N_c(Z(P))$ 有一个正规 p - 补, 那么 G 有一个正规 p - 补。一些群论学者对于有限群的 p - 幂零性作了比较深入的研究^[3-7]。已知, (1) G 的所有幂零正规子群的积 $F(G)$ 是 G 的幂零正规子群; (2) 设 N 是 G 的极小正规子群, 则 $F(G) \leq C_c(N)$ 。最近, Asaad M Csörgö 和 Ramadan M^[8] 加强了文献[2]的结论。Asaad M^[9] 利用 \mathfrak{R} -子群研究了群的 p - 幂零性, 如果 P 是 G 的 Sylow p - 子群, 那么 G 是 p - 幂零的当且仅当 $N_c(P)$ 是 p - 幂零的, 且 P 的每一个极大子群在 $\mathfrak{R}(G)$ 中。本文的主要结果:

设 P 是群 G 的 Sylow p - 子群满足 $\Omega_1(P \cap F(G)) \leq Z_\infty(G)$, 如果 $N_c(Z(P))$ 有一个正规 p - 补, 则 G 有一个正规 p - 补。在此结论基础上, 如果 G 还没有与 A_4 同构的主因子, 那么 G 有一个正规 p - 补。

1 预备知识

定义 1^[10] 如果 G 有一个正规 Hall p' - 子群, 子群 $H \leq G$ 称为 p - 幂零的。

引理 1^[11] 如果 G 不是 p - 幂零的, 但其真子群是 p - 幂零的, 则 G 不是幂零的, 但其真子群是幂零的。

引理 2^[11] 如果 G 不是幂零的, 但其真子群是幂零的, 则

- (1) 存在素数 p , P 是群 G 的正规 Sylow p - 子群且 $G = PQ$, 其中 Q 是 G 的非正规循环 q - 子群, 且 $q \neq p$ 。
- (2) $P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群。
- (3) 如果 P 是非交换的且 $p \neq 2$, 那么 $\exp(P) = p$; 如果 P 是非交换的且 $p = 2$, 那么 $\exp(P) = 4$ 。
- (4) 如果 P 是交换的, 那么 $\exp(P) = p$ 。

2 主要结果

定理 1 设 P 是群 G 的 Sylow p - 子群满足 $\Omega_1(P \cap F(G)) \leq Z_\infty(G)$ 。如果 $N_c(Z(P))$ 有一个正规 p - 补, 那么 G 有一个正规 p - 补。

证明 (反证法) 假设结论不真。选取一个极小阶的群 G 作为反例。分步骤证明:

(1) $O_{p'}(G) = 1$ 。如果 $O_{p'}(G) \neq 1$, 则设 $\bar{G} = G/O_{p'}(G)$, 由

$$Z((PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)) \cap F(G/O_{p'}(G))) = Z(P \cap F(G))O_{p'}(G)/O_{p'}(G) = \overline{Z(P \cap F(G))}$$

且 $N_{G/O_{p'}(G)}(Z(PO_{p'}(G)/O_{p'}(G))) = \overline{N_c(Z(P))}$, 定理 1 的条件满足, 故由群 G 的极小选择, $G/O_{p'}(G)$ 有一个正规 p - 补, 从而 G 有一个正规 p - 补。矛盾。

(2) $P \leq M \leq G$ 的真子群 M 是 p - 幂零的。由于 $P \cap F(G) \cap M \geq P \cap F(M)$ 且 $N_c(Z(P)) \cap M = N_M(Z(P))$, 故 M, P 满足定理 1 的条件, 从而 M 是 p - 幂零的。

收稿日期: 2011-03-09

基金项目: 四川理工学院科研基金(2010KYXJL017); 四川理工学院教改项目(JG-0928)

作者简介: 陈德勤(1966-), 男, 四川仁寿人, 副教授, 主要从事图论及其应用方面的研究。

(3) $P \cap F(G) \neq 1$ 。如果 $P \cap F(G) = 1$, 则设 $PF(G) \leq G$ 。如果 $PF(G) = G$, 则 $F(G) \triangleleft G$, 且 $F(G)$ 是 G 的极小正规幂零子群, 从而 P 是群 G 的极大子群, 且 $F(G)$ 是正规 Hall p' -子群, 因此 $G = P \times F(G)$, 与假设矛盾。如果 $PF(G) < G$, 则由证明(2), $PF(G) > P$ 是 p -幂零的。设 $G_1 = PF(G)$, 则 $G_1 = PF(G) = P \times F(G)$ 。由引理1和引理2(1)知 $G = PQ$ 且 $P \triangleleft G$, 其中 Q 是 G 的非正规循环 q -子群, 因此 $F(G) \leq Q$ 。如果 $F(G) = Q$, 与假设矛盾, 故 $F(G) < Q$, 从而存在 Q 的一个 p -子群满足 $Q = F(G)K$, 由证明(2)有 $PK < G$ 是 p -幂零的, 而 $PK = P \times K$, 那么 $G = PF(G)K = (F(G) \times P) \times K = P \times Q$, 矛盾, 故 $P \cap F(G) \neq 1$ 。

(4) $F(G) < G$ 。显然 $F(G) \leq G$, 如果 $F(G) = G$, 则 G 是幂零的, 矛盾。

(5) $P \cap F(G)$ 是 G 的一个非平凡正规子群。由证明(3)知 $P \cap F(G) \neq 1$, 设 $P \cap F(G)$ 不是 G 的正规子群, 则 $N_c(P \cap F(G)) < G$, 由证明(2), $N_c(P \cap F(G))$ 是 p -幂零的。设 $G_1 = N_c(P \cap F(G))$, 则 $G_1 = PK$, 其中 K 是 P 的正规 p -补且为 G_1 的 Sylow q -子群, $q \neq p$, 由于 $P \leq Z_\infty(G)$, 故 $G_1 = P \times K$, 则 $P \leq C_c(K)$, 如果 $C_c(K) = G$, 则必有 $Q = K$, 且 $G = P \times Q$, 矛盾。如果 $C_c(K) < G$, 则 $G = PQ < C_c(K)Q = G$, 矛盾。

(6) $\Omega_1(F(G) \cap P) \neq F(G) \cap P$ 。若 $\Omega_1(F(G) \cap P) = F(G) \cap P$, 则 $\Omega_1(F(G) \cap P) \leq Z_\infty(G)$, 故 $N_c(Z_\infty(G)) \geq N_c(F(G) \cap P) \geq N_c(P)$, 从而由证明(2)、(5)和假设知 G 是 p -幂零的。矛盾。

(7) 最后的证明。由证明(5), $F(G) \cap P \triangleleft G$ 知 $\Omega_1(F(G) \cap P) \leq G$, 由证明(6)和题设知, $C_c(F(G) \cap P) \geq C_c(\Omega_1(F(G) \cap P)) \geq P \geq P \cap F(G)$ 。故 $N_c(\Omega_1(F(G) \cap P))/C_c(\Omega_1(F(G) \cap P)) = G/C_c(\Omega_1(F(G) \cap P))$ 是一个 p -群, 且同构于 $Aut(\Omega_1(F(G) \cap P))$, 如果 $p > 2$, 由引理2(3)得, $\exp(P) = p$, 则 $|G/C_c(\Omega_1(F(G) \cap P))| \equiv (|G|, p-1)$, 故 $G = N_c(\Omega_1(F(G) \cap P)) = C_c(\Omega_1(F(G) \cap P))$, 由 Frobenius 定理, G 是 p -幂零的, 矛盾。如果 $p = 2$, 那么 P 不是一个非循环交换 2-群, 则 P 要么是循环群, 要么同构于四元数群。如果是循环群, 那么 $|P| = 2$, 则 $P \leq Z(G) \leq Z_\infty(G)$, 从而 G 是 p -幂零的, 如果 P 同构于四元数群, 由于 $N_c(Z(P))$ 有一个正规 p -补, 它不含有四元数群, 矛盾。定理1得证。

众所周知, 极小子群是素数阶子群, 如果阶数为偶数, 则极小子群是 2 阶或 4 阶子群, 由于 $F(G)$ 是 G 的极小幂零正规子群。因此有:

推论 1 如果 $\Omega_1(P) \leq Z_\infty(G)$, 其中 P 是群 $F(G)$ 的 Sylow p -子群, 且如果 $N_c(Z(P))$ 有正规 p -补, 那么 G 有正规 p -补。

证明 因为 $\Omega_1(P) = \Omega_1(P \cap F(G)) \leq Z_\infty(G)$, 则

由定理1得到, G 有正规 p -补。

推论 2 若 $\Omega_1(P) \leq Z_\infty(G)$, 且 $N_c(Z(P))$ 有正规 2-补, 其中 P 是 Sylow 2-子群, 那么 G 是可解群。

证明 由于群 G 的任意素数元都在 $Z_\infty(G)$ 中, 那么当 G 是奇数阶群, 由奇数阶定理知 G 是可解的; 当 G 是偶数阶群, 显然二阶元在 $Z_\infty(G)$ 中, 又由定理1知, G 是 2-幂零的, 因而存在一个正规 Hall z' -子群 M 满足 $G/M \cong P$ 是可解的。故由文献[12]知 G 是可解的。

定理 2 设 P 是群 G 的 Sylow p -子群满足 $\Omega_1(P \cap F(G)) \leq Z_\infty(G)$, 若 $N_c(Z(P))$ 有一个正规 p -补, 且 G 没有与 A_4 同构的主因子, 那么 G 有一个正规 p -补。

证明 (反证法)假设结论不真。选取一个极小阶的群 G 作为反例。

(1) $O_{p'}(G) = 1$ 。如果 $O_{p'}(G) \neq 1$, 则设 $\bar{G} = G/O_{p'}(G)$, 由

$$Z((PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)) \cap F(G/O_{p'}(G))) = Z(P \cap F(G))O_{p'}(G)/O_{p'}(G) = \overline{Z(P \cap F(G))}$$

且由 $N_{G/O_{p'}(G)}(PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)) = \overline{N_c(P)}$, 故定理2的条件满足, 再由群 G 的极小选择知 $G/O_{p'}(G)$ 有一个正规 p -补, 故 G 有一个正规 p -补。矛盾。

(2) $P \leq M \leq G$ 的真子群 M 是 p -幂零的。由 $P \cap F(G) \cap M \geq P \cap F(M)$ 且 $N_c(P) \cap M = N_M(P)$, 故 M, P 满足定理2的条件, 从而 M 是 p -幂零的。

(3) $P \cap F(G)$ 是 G 的一个非平凡正规子群。

(4) 最后的证明。由证明(5), $F(G) \cap P \triangleleft G$, 则 $\Omega_1(F(G) \cap P) \leq G$, 由证明(6)和题设知, $C_c(F(G) \cap P) \geq C_c(\Omega_1(F(G) \cap P)) \geq P \geq P \cap F(G)$, 故 $N_c(\Omega_1(F(G) \cap P))/C_c(\Omega_1(F(G) \cap P)) = G/C_c(\Omega_1(F(G) \cap P))$ 是 p -群, 且同构于 $Aut(\Omega_1(F(G) \cap P))$ 的一个子群, 如果 $p > 2$, 由引理2(3)得, $\exp(P) = p$, 则 $|G/C_c(\Omega_1(F(G) \cap P))| \equiv (|G|, p-1)$ 故 $G = N_c(\Omega_1(F(G) \cap P)) = C_c(\Omega_1(F(G) \cap P))$, 由 Frobenius 定理, G 是 p -幂零的, 矛盾。如果 $p = 2$, 那么 P 不是一个非循环交换 2-群, 因此 P 要么是循环群, 要么同构于四元数群, 如果是循环群, 那么 $|P| = 2$, 则 $P \leq Z(G) \leq Z_\infty(G)$, 从而 G 是 p -幂零的, 如果 P 同构于四元数群, 与题设矛盾。定理2得证。

定理 3 设 N 是 G 的正规子群满足 G/N 是 p -幂零的, 如果 $\Omega_1(F(N)) \leq Z_\infty(G)$, 且当 $p = 2$ 时, N 的 4 阶元在 $Z_\infty(G)$ 中, 那么 G 是 p -幂零的。

证明 (反证法)假设结论不真。选取一个极小阶的群 G 作为反例。则:

(1) $N \leq M \leq G$ 的每一个真子群 M 是 p -幂零的, 因而 G 是一个非 p -幂零群, 但是其真子群是 p -幂零的。

事实上, 对 $\forall M < G$, 因 G/N 是 p -幂零的, 有 $K/(K \cap N) \cong KN/N$ 是 p -幂零的, 而 $\Omega_1(F(N) \cap M) \leq Z_\infty(G) \cap M \leq Z_\infty(G)$, 故 $M, M \cap F(N)$ 满足题设, 由

G 的极小选择知 M 是 p -幂零的,因而 G 是非幂零群,但其真子群是 p -幂零的,由引理 1 和引理 2(1) 得 $G = PQ$, 在此 $P \triangleleft G, Q$ 是一个非正规的循环 Sylow q -子群。

(2) $G/F(N)$ 是 p -幂零的。由于 $N \triangleleft G$, 故有 $F(N) \leq F(G)$ 且 $F(N) \triangleleft G$ 。

如果 $p = 2$, 如果 $G/F(N)$ 不是 p -幂零的,那么由引理 1, 必然存在一个 2-子群 $P_1 \leq P$ 满足 $F(N) \leq P_1$, 且 $N_{G/F(N)}$ 不是 2-幂零的,显然 $H < P_1$, 因而 $N_G(P_1) < G$, 选取 P_0 为阶最大的满足 $H < P_0 < P$, 且 $N_G(P_0)$ 是非 2-幂零的,显然,可以假设 $P_2 \leq P$, 因而 $P_0 \leq P$, 由 P_0 的极大选择知, $N_G(P_2)$ 是 2-幂零的,而且 $\Omega_1(P_2 \cap F(N)) \leq \Omega_1(P \cap F(N)) \leq \Omega_1(F(N))Z_\infty(G) \cap P \leq Z_\infty(G) \cap P$, 故 $\Omega_1(P_2 \cap F(N)) \leq Z_\infty(P_2)$, 由 G 的极小选择, $N_G(Z(P_0))$ 是 2-幂零的,矛盾。

如果 $p > 2$, 由文献[11]中 IV 定理 5.5 知结论成立。

(3) $G/(P \cap F(N))$ 是 p -幂零的。由引理 1 知 $G/P \cong Q$ 是幂零的,由证明(2)知, $G/F(N)$ 是 p -幂零的,又 $G/(P \cap F(N)) \cong G/P \cdot G/F(N)$, 故 $G/(P \cap F(N))$ 是 p -幂零的。

(4) $P \leq F(N)$ 。如果 $P \leq F(N)$ 不成立,则 $P \cap F(N) < P$, 故 $Q(P \cap F(N)) < PQ$, 由引理 1 有 $Q(P \cap F(N))$ 是幂零的, $Q(P \cap F(N)) = Q \times (F(N) \cap P)$, 由于

$$G/(P \cap F(N)) = P/(P \cap F(N)) \cdot$$

$$Q(P \cap F(N))/(P \cap F(N))$$

$$\text{而 } Q(P \cap F(N))/(P \cap F(N))$$

$\triangleleft G/(Q(P \cap F(N))/(P \cap F(N)))$, 故 $Q \triangleleft Q(Q(P \cap F(N))/(P \cap F(N))) \triangleleft G$, 所以 $G = P \times Q$, 矛盾。

(5) 结束证明。如果 $p > 2$, 由引理 2(3), $\exp(P) = p$, 故 $P \leq Z_\infty(G)$, 由引理 1 知, $G = P \times Q$, 矛盾。如

果 $p = 2$, 由引理 2(1), $P \triangleleft G$, 由 2 阶或 4 阶元都在 $Z_\infty(G)$ 中, 由定理 1, 得 G 是 2-幂零的。矛盾。

参考文献:

- [1] Thompson J G. Normal p -complements for finite groups [J]. J. Alg, 1964, 1: 43-46.
- [2] Zhang G. On two theorems of Thompson [J]. Proc. Amer. Math. Soc, 1986, 98: 579-582.
- [3] Asaad M. On p -nilpotence of finite groups [J]. J. Alg, 2004, 277: 157-164.
- [4] Guo X, Shum K P. The influence of minimal subgroups of focal subgroups on the structure of finite groups [J]. J. Pure Appl. Alg, 2002, 169: 43-50.
- [5] Hu B, Guo W. C -semipermutable subgroups of finite groups [J]. Siberian Math. J, 2007, 48(1): 180-188.
- [6] Li Y, Li X. Z -permutable subgroups and p -nilpotency of finite groups [J]. J. Pure Appl. Alg, 2005, 202: 72-81.
- [7] Ballester-Boliches A, Guo X. Some results on p -nilpotence and solubility of finite groups [J]. J. Alg, 2000, 228: 491-496.
- [8] Asaad M Csörgö, Ramadan M. Normal-complements for finite groups [J]. Acta Math. Hungar, DOI: 10. 1007/s10474-007-7049-7, 2007.
- [9] Asaad M. On p -nilpotence and super-solvability of finite groups [J]. Commu. Alg, 2006, 34: 189-195.
- [10] Robinson D J S. A course in the theory of groups [M]. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [11] Huppert B. Endliche Gruppen [M]. Berlin: New York, 1968.
- [12] Hall M. The theory of groups [M]. New York: Macmilan, 1959: 144.

Some Results on p -nilpotence of Finite Groups

CHEN De-qin

(School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract: It is very important for minimal subgroups of groups in the research of groups. In this paper, we will give some results on the influence of minimal subgroup on the structure of p -nilpotence. And a main result is gotten: If P is a Sylow p -subgroups of G , suppose that $\Omega_1(P \cap F(G)) \leq Z_\infty(G)$, and $N_G(Z(P))$ has a normal p -complement, then G has a normal p -complement. And if G has no main factor, which is isomorphic with A_4 , then G has a sylow p -subgroups.

Key words: nilpotence; p -nilpotent; normal subgroups