

# 有限群的正规 $p$ - 补的一些结论

陈德勤

(四川理工学院理学院, 四川 自贡 643000)

**摘要:**有限群的极小子群在群论研究中有很重要的地位。文章探讨极小子群对有限群的  $p$ - 幂零性,并得到:设  $P$  是群  $G$  的 Sylow  $p$ - 子群,满足  $\Omega_1(P \cap F(G)) \leq Z_\infty(G)$ , 如果  $N_c(Z(P))$  有一个正规  $p$ - 补,那么  $G$  有一个正规  $p$ - 补;若  $G$  还没有与  $A_4$  同构的主因子,则  $G$  有一个正规  $p$ - 补。

**关键词:**幂零性;  $p$ - 幂零的;正规子群

**中图分类号:** O135

**文献标识码:** A

本文中所有群均为有限群。群的极小子群是一个素数阶子群,如果是偶数阶的,那么极小子群是 2 阶或 4 阶子群。Thompson J G<sup>[1]</sup> 进一步推广了幂零的结论,指出:如果  $p$  是一个奇素数,  $P$  是  $G$  的 Sylow  $p$ -子群,如果  $N_c(J(P))$  和  $N_c(Z(P))$  有正规  $p$ - 补,那么  $G$  有正规  $p$ - 补。在 Thompson 的结论基础上,Zhang G<sup>[2]</sup> 得到了:设  $P$  是群  $G$  的 Sylow  $p$ - 子群满足  $\Omega_1(P) \leq Z(P)$ , 如果  $N_c(Z(P))$  有一个正规  $p$ - 补,那么  $G$  有一个正规  $p$ - 补。一些群论学者对于有限群的  $p$ - 幂零性作了比较深入的研究<sup>[3-7]</sup>。已知,(1)  $G$  的所有幂零正规子群的积  $F(G)$  是  $G$  的幂零正规子群;(2) 设  $N$  是  $G$  的极小正规子群,则  $F(G) \leq C_c(N)$ 。最近,Asaad M Csörgö 和 Ramadan M<sup>[8]</sup> 加强了文献[2]的结论。Asaad M<sup>[9]</sup> 利用  $\mathfrak{R}$ -子群研究了群的  $p$ - 幂零性,如果  $P$  是  $G$  的 Sylow  $p$ - 子群,那么  $G$  是  $p$ - 幂零的当且仅当  $N_c(P)$  是  $p$ - 幂零的,且  $P$  的每一个极大子群在  $\mathfrak{R}(G)$  中。本文的主要结果:

设  $P$  是群  $G$  的 Sylow  $p$ - 子群满足  $\Omega_1(P \cap F(G)) \leq Z_\infty(G)$ , 如果  $N_c(Z(P))$  有一个正规  $p$ - 补,则  $G$  有一个正规  $p$ - 补。在此结论基础上,如果  $G$  还没有与  $A_4$  同构的主因子,那么  $G$  有一个正规  $p$ - 补。

## 1 预备知识

**定义 1<sup>[10]</sup>** 如果  $G$  有一个正规 Hall  $p'$ - 子群,子群  $H \leq G$  称为  $p$ - 幂零的。

**引理 1<sup>[11]</sup>** 如果  $G$  不是  $p$ - 幂零的,但其真子群是  $p$ - 幂零的,则  $G$  不是幂零的,但其真子群是幂零的。

**引理 2<sup>[11]</sup>** 如果  $G$  不是幂零的,但其真子群是幂零的,则

- (1) 存在素数  $p$ ,  $P$  是群  $G$  的正规 Sylow  $p$ - 子群且  $G = PQ$ , 其中  $Q$  是  $G$  的非正规循环  $q$ - 子群,且  $q \neq p$ 。
- (2)  $P/\Phi(P)$  是  $G/\Phi(P)$  的极小正规子群。
- (3) 如果  $P$  是非交换的且  $p \neq 2$ , 那么  $\exp(P) = p$ ; 如果  $P$  是非交换的且  $p = 2$ , 那么  $\exp(P) = 4$ 。
- (4) 如果  $P$  是交换的,那么  $\exp(P) = p$ 。

## 2 主要结果

**定理 1** 设  $P$  是群  $G$  的 Sylow  $p$ - 子群满足  $\Omega_1(P \cap F(G)) \leq Z_\infty(G)$ 。如果  $N_c(Z(P))$  有一个正规  $p$ - 补,那么  $G$  有一个正规  $p$ - 补。

**证明** (反证法)假设结论不真。选取一个极小阶的群  $G$  作为反例。分步骤证明:

(1)  $O_{p'}(G) = 1$ 。如果  $O_{p'}(G) \neq 1$ , 则设  $\bar{G} = G/O_{p'}(G)$ , 由

$$Z((PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)) \cap F(G/O_{p'}(G))) = Z(P \cap F(G))O_{p'}(G)/O_{p'}(G) = \overline{Z(P \cap F(G))}$$

且  $N_{G/O_{p'}(G)}(Z(PO_{p'}(G)/O_{p'}(G))) = \overline{N_c(Z(P))}$ , 定理 1 的条件满足,故由群  $G$  的极小选择,  $G/O_{p'}(G)$  有一个正规  $p$ - 补,从而  $G$  有一个正规  $p$ - 补。矛盾。

(2)  $P \leq M \leq G$  的真子群  $M$  是  $p$ - 幂零的。由于  $P \cap F(G) \cap M \geq P \cap F(M)$  且  $N_c(Z(P)) \cap M = N_M(Z(P))$ , 故  $M, P$  满足定理 1 的条件,从而  $M$  是  $p$ - 幂零的。

(3)  $P \cap F(G) \neq 1$ . 如果  $P \cap F(G) = 1$ , 则设  $PF(G) \leq G$ . 如果  $PF(G) = G$ , 则  $F(G) \triangleleft G$ , 且  $F(G)$  是  $G$  的极小正规幂零子群, 从而  $P$  是群  $G$  的极大子群, 且  $F(G)$  是正规 Hall  $p'$ -子群, 因此  $G = P \times F(G)$ , 与假设矛盾. 如果  $PF(G) < G$ , 则由证明(2),  $PF(G) > P$  是  $p$ -幂零的. 设  $G_1 = PF(G)$ , 则  $G_1 = PF(G) = P \times F(G)$ . 由引理1和引理2(1)知  $G = PQ$  且  $P \triangleleft G$ , 其中  $Q$  是  $G$  的非正规循环  $q$ -子群, 因此  $F(G) \leq Q$ . 如果  $F(G) = Q$ , 与假设矛盾, 故  $F(G) < Q$ , 从而存在  $Q$  的一个  $p$ -子群满足  $Q = F(G)K$ , 由证明(2)有  $PK < G$  是  $p$ -幂零的, 而  $PK = P \times K$ , 那么  $G = PF(G)K = (F(G) \times P) \times K = P \times Q$ , 矛盾, 故  $P \cap F(G) \neq 1$ .

(4)  $F(G) < G$ . 显然  $F(G) \leq G$ , 如果  $F(G) = G$ , 则  $G$  是幂零的, 矛盾.

(5)  $P \cap F(G)$  是  $G$  的一个非平凡正规子群. 由证明(3)知  $P \cap F(G) \neq 1$ , 设  $P \cap F(G)$  不是  $G$  的正规子群, 则  $N_c(P \cap F(G)) < G$ , 由证明(2),  $N_c(P \cap F(G))$  是  $p$ -幂零的. 设  $G_1 = N_c(P \cap F(G))$ , 则  $G_1 = PK$ , 其中  $K$  是  $P$  的正规  $p$ -补且为  $G_1$  的 Sylow  $q$ -子群,  $q \neq p$ , 由于  $P \leq Z_\infty(G)$ , 故  $G_1 = P \times K$ , 则  $P \leq C_c(K)$ , 如果  $C_c(K) = G$ , 则必有  $Q = K$ , 且  $G = P \times Q$ , 矛盾. 如果  $C_c(K) < G$ , 则  $G = PQ < C_c(K)Q = G$ , 矛盾.

(6)  $\Omega_1(F(G) \cap P) \neq F(G) \cap P$ . 若  $\Omega_1(F(G) \cap P) = F(G) \cap P$ , 则  $\Omega_1(F(G) \cap P) \leq Z_\infty(G)$ , 故  $N_c(Z_\infty(G)) \geq N_c(F(G) \cap P) \geq N_c(P)$ , 从而由证明(2)、(5)和假设知  $G$  是  $p$ -幂零的. 矛盾.

(7) 最后的证明. 由证明(5),  $F(G) \cap P \triangleleft G$  知  $\Omega_1(F(G) \cap P) \leq G$ , 由证明(6)和题设知,  $C_c(F(G) \cap P) \geq C_c(\Omega_1(F(G) \cap P)) \geq P \geq P \cap F(G)$ . 故  $N_c(\Omega_1(F(G) \cap P))/C_c(\Omega_1(F(G) \cap P)) = G/C_c(\Omega_1(F(G) \cap P))$  是一个  $p$ -群, 且同构于  $Aut(\Omega_1(F(G) \cap P))$ , 如果  $p > 2$ , 由引理2(3)得,  $\exp(P) = p$ , 则  $|G/C_c(\Omega_1(F(G) \cap P))| \equiv (|G|, p-1)$ , 故  $G = N_c(\Omega_1(F(G) \cap P)) = C_c(\Omega_1(F(G) \cap P))$ , 由 Frobenius 定理,  $G$  是  $p$ -幂零的, 矛盾. 如果  $p = 2$ , 那么  $P$  不是一个非循环交换 2-群, 则  $P$  要么是循环群, 要么同构于四元数群. 如果是循环群, 那么  $|P| = 2$ , 则  $P \leq Z(G) \leq Z_\infty(G)$ , 从而  $G$  是  $p$ -幂零的, 如果  $P$  同构于四元数群, 由于  $N_c(Z(P))$  有一个正规  $p$ -补, 它不含有四元数群, 矛盾. 定理1得证.

众所周知, 极小子群是素数阶子群, 如果阶数为偶数, 则极小子群是 2 阶或 4 阶子群, 由于  $F(G)$  是  $G$  的极小幂零正规子群. 因此有:

**推论 1** 如果  $\Omega_1(P) \leq Z_\infty(G)$ , 其中  $P$  是群  $F(G)$  的 Sylow  $p$ -子群, 且如果  $N_c(Z(P))$  有正规  $p$ -补, 那么  $G$  有正规  $p$ -补.

**证明** 因为  $\Omega_1(P) = \Omega_1(P \cap F(G)) \leq Z_\infty(G)$ , 则

由定理1得到,  $G$  有正规  $p$ -补.

**推论 2** 若  $\Omega_1(P) \leq Z_\infty(G)$ , 且  $N_c(Z(P))$  有正规 2-补, 其中  $P$  是 Sylow 2-子群, 那么  $G$  是可解群.

**证明** 由于群  $G$  的任意素数元都在  $Z_\infty(G)$  中, 那么当  $G$  是奇数阶群, 由奇数阶定理知  $G$  是可解的; 当  $G$  是偶数阶群, 显然二阶元在  $Z_\infty(G)$  中, 又由定理1知,  $G$  是 2-幂零的, 因而存在一个正规 Hall  $z'$ -子群  $M$  满足  $G/M \cong P$  是可解的. 故由文献[12]知  $G$  是可解的.

**定理 2** 设  $P$  是群  $G$  的 Sylow  $p$ -子群满足  $\Omega_1(P \cap F(G)) \leq Z_\infty(G)$ , 若  $N_c(Z(P))$  有一个正规  $p$ -补, 且  $G$  没有与  $A_4$  同构的主因子, 那么  $G$  有一个正规  $p$ -补.

**证明** (反证法)假设结论不真. 选取一个极小阶的群  $G$  作为反例.

(1)  $O_{p'}(G) = 1$ . 如果  $O_{p'}(G) \neq 1$ , 则设  $\bar{G} = G/O_{p'}(G)$ , 由

$$Z((PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)) \cap F(G/O_{p'}(G))) = Z(P \cap F(G))O_{p'}(G)/O_{p'}(G) = \overline{Z(P \cap F(G))}$$

且由  $N_{G/O_{p'}(G)}(PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)) = \overline{N_c(P)}$ , 故定理2的条件满足, 再由群  $G$  的极小选择知  $G/O_{p'}(G)$  有一个正规  $p$ -补, 故  $G$  有一个正规  $p$ -补. 矛盾.

(2)  $P \leq M \leq G$  的真子群  $M$  是  $p$ -幂零的. 由  $P \cap F(G) \cap M \geq P \cap F(M)$  且  $N_c(P) \cap M = N_M(P)$ , 故  $M, P$  满足定理2的条件, 从而  $M$  是  $p$ -幂零的.

(3)  $P \cap F(G)$  是  $G$  的一个非平凡正规子群.

(4) 最后的证明. 由证明(5),  $F(G) \cap P \triangleleft G$ , 则  $\Omega_1(F(G) \cap P) \leq G$ , 由证明(6)和题设知,  $C_c(F(G) \cap P) \geq C_c(\Omega_1(F(G) \cap P)) \geq P \geq P \cap F(G)$ , 故  $N_c(\Omega_1(F(G) \cap P))/C_c(\Omega_1(F(G) \cap P)) = G/C_c(\Omega_1(F(G) \cap P))$  是  $p$ -群, 且同构于  $Aut(\Omega_1(F(G) \cap P))$  的一个子群, 如果  $p > 2$ , 由引理2(3)得,  $\exp(P) = p$ , 则  $|G/C_c(\Omega_1(F(G) \cap P))| \equiv (|G|, p-1)$  故  $G = N_c(\Omega_1(F(G) \cap P)) = C_c(\Omega_1(F(G) \cap P))$ , 由 Frobenius 定理,  $G$  是  $p$ -幂零的, 矛盾. 如果  $p = 2$ , 那么  $P$  不是一个非循环交换 2-群, 因此  $P$  要么是循环群, 要么同构于四元数群, 如果是循环群, 那么  $|P| = 2$ , 则  $P \leq Z(G) \leq Z_\infty(G)$ , 从而  $G$  是  $p$ -幂零的, 如果  $P$  同构于四元数群, 与题设矛盾. 定理2得证.

**定理 3** 设  $N$  是  $G$  的正规子群满足  $G/N$  是  $p$ -幂零的, 如果  $\Omega_1(F(N)) \leq Z_\infty(G)$ , 且当  $p = 2$  时,  $N$  的 4 阶元在  $Z_\infty(G)$  中, 那么  $G$  是  $p$ -幂零的.

**证明** (反证法)假设结论不真. 选取一个极小阶的群  $G$  作为反例. 则:

(1)  $N \leq M \leq G$  的每一个真子群  $M$  是  $p$ -幂零的, 因而  $G$  是一个非  $p$ -幂零群, 但是其真子群是  $p$ -幂零的.

事实上, 对  $\forall M < G$ , 因  $G/N$  是  $p$ -幂零的, 有  $K/(K \cap N) \cong KN/N$  是  $p$ -幂零的, 而  $\Omega_1(F(N) \cap M) \leq Z_\infty(G) \cap M \leq Z_\infty(G)$ , 故  $M, M \cap F(N)$  满足题设, 由

$G$  的极小选择知  $M$  是  $p$ -幂零的,因而  $G$  是非幂零群,但其真子群是  $p$ -幂零的,由引理 1 和引理 2(1) 得  $G = PQ$ , 在此  $P \triangleleft G, Q$  是一个非正规的循环 Sylow  $q$ -子群。

(2)  $G/F(N)$  是  $p$ -幂零的。由于  $N \triangleleft G$ , 故有  $F(N) \leq F(G)$  且  $F(N) \triangleleft G$ 。

如果  $p = 2$ , 如果  $G/F(N)$  不是  $p$ -幂零的,那么由引理 1, 必然存在一个 2-子群  $P_1 \leq P$  满足  $F(N) \leq P_1$ , 且  $N_{G/F(N)}$  不是 2-幂零的,显然  $H < P_1$ , 因而  $N_G(P_1) < G$ , 选取  $P_0$  为阶最大的满足  $H < P_0 < P$ , 且  $N_G(P_0)$  是非 2-幂零的,显然,可以假设  $P_2 \leq P$ , 因而  $P_0 \leq P$ , 由  $P_0$  的极大选择知,  $N_G(P_2)$  是 2-幂零的,而且  $\Omega_1(P_2 \cap F(N)) \leq \Omega_1(P \cap F(N)) \leq \Omega_1(F(N))Z_\infty(G) \cap P \leq Z_\infty(G) \cap P$ , 故  $\Omega_1(P_2 \cap F(N)) \leq Z_\infty(P_2)$ , 由  $G$  的极小选择,  $N_G(Z(P_0))$  是 2-幂零的,矛盾。

如果  $p > 2$ , 由文献[11]中 IV 定理 5.5 知结论成立。

(3)  $G/(P \cap F(N))$  是  $p$ -幂零的。由引理 1 知  $G/P \cong Q$  是幂零的,由证明(2)知,  $G/F(N)$  是  $p$ -幂零的,又  $G/(P \cap F(N)) \cong G/P \cdot G/F(N)$ , 故  $G/(P \cap F(N))$  是  $p$ -幂零的。

(4)  $P \leq F(N)$ 。如果  $P \leq F(N)$  不成立,则  $P \cap F(N) < P$ , 故  $Q(P \cap F(N)) < PQ$ , 由引理 1 有  $Q(P \cap F(N))$  是幂零的,  $Q(P \cap F(N)) = Q \times (F(N) \cap P)$ , 由于

$$G/(P \cap F(N)) = P/(P \cap F(N)) \cdot$$

$$Q(P \cap F(N))/(P \cap F(N))$$

$$\text{而 } Q(P \cap F(N))/(P \cap F(N))$$

$\triangleleft G/(Q(P \cap F(N))/(P \cap F(N)))$ , 故  $Q \triangleleft Q(Q(P \cap F(N))/(P \cap F(N))) \triangleleft G$ , 所以  $G = P \times Q$ , 矛盾。

(5) 结束证明。如果  $p > 2$ , 由引理 2(3),  $\exp(P) = p$ , 故  $P \leq Z_\infty(G)$ , 由引理 1 知,  $G = P \times Q$ , 矛盾。如

果  $p = 2$ , 由引理 2(1),  $P \triangleleft G$ , 由 2 阶或 4 阶元都在  $Z_\infty(G)$  中, 由定理 1, 得  $G$  是 2-幂零的。矛盾。

参考文献:

- [1] Thompson J G. Normal  $p$ -complements for finite groups [J]. J. Alg, 1964, 1: 43-46.
- [2] Zhang G. On two theorems of Thompson [J]. Proc. Amer. Math. Soc, 1986, 98: 579-582.
- [3] Asaad M. On  $p$ -nilpotence of finite groups [J]. J. Alg, 2004, 277: 157-164.
- [4] Guo X, Shum K P. The influence of minimal subgroups of focal subgroups on the structure of finite groups [J]. J. Pure Appl. Alg, 2002, 169: 43-50.
- [5] Hu B, Guo W.  $C$ -semipermutable subgroups of finite groups [J]. Siberian Math. J, 2007, 48(1): 180-188.
- [6] Li Y, Li X.  $Z$ -permutable subgroups and  $p$ -nilpotency of finite groups [J]. J. Pure Appl. Alg, 2005, 202: 72-81.
- [7] Ballester-Boliches A, Guo X. Some results on  $p$ -nilpotence and solubility of finite groups [J]. J. Alg, 2000, 228: 491-496.
- [8] Asaad M Csörgö, Ramadan M. Normal-complements for finite groups [J]. Acta Math. Hungar, DOI: 10. 1007/s10474-007-7049-7, 2007.
- [9] Asaad M. On  $p$ -nilpotence and super-solvability of finite groups [J]. Commu. Alg, 2006, 34: 189-195.
- [10] Robinson D J S. A course in the theory of groups [M]. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [11] Huppert B. Endliche Gruppen [M]. Berlin: New York, 1968.
- [12] Hall M. The theory of groups [M]. New York: Macmilan, 1959: 144.

### Some Results on $p$ -nilpotence of Finite Groups

CHEN De-qin

(School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

**Abstract:** It is very important for minimal subgroups of groups in the research of groups. In this paper, we will give some results on the influence of minimal subgroup on the structure of  $p$ -nilpotence. And a main result is gotten: If  $P$  is a Sylow  $p$ -subgroups of  $G$ , suppose that  $\Omega_1(P \cap F(G)) \leq Z_\infty(G)$ , and  $N_G(Z(P))$  has a normal  $p$ -complement, then  $G$  has a normal  $p$ -complement. And if  $G$  has no main factor, which is isomorphic with  $A_4$ , then  $G$  has a sylow  $p$ -subgroups.

**Key words:** nilpotence;  $p$ -nilpotent; normal subgroups