

一类三阶三点边值问题正解的存在性

郑 婷, 朱思念, 关 琦

(中国矿业大学理学院, 江苏 徐州 221008)

摘 要: 文章研究了一类三阶三点边值问题 $u'''(t) = a(t)f(t, u(t))$ $u(0) = \delta u(\eta)$ $u'(1) = 0$, $u'(1) = 0$ 两个正解的存在性, 首先给出该边值问题的格林函数, 将边值问题的解的存在性转化为一个积分算子的不动点的存在性, 在适当的 Banach 空间中定义了一个锥, 然后结合格林函数的性质, 利用 Krasnoselskii 不动点定理研究了该边值问题正解的存在性, 给出了两个正解存在的充分条件。

关键词: 三阶三点; Krasnoselskii 不动点定理; 正解

中图分类号: O175.8

文献标识码: A

1 预备知识

常微分方程边值问题近年来获得了丰富的研究成果^[1-2], 很多文献常常以不动点定理作为工具^[3-7], 文献 [3] 用 Avery - Peterson 不动点定理研究了边值问题

$$\begin{cases} u'''(t) = a(t)f(t, u(t)) & 0 < t < 1 \\ u(0) = \delta u(\eta) & u'(1) = 0 & u''(1) = 0 \end{cases}$$

其中 $\delta \in (0, 1)$, $\eta \in [1/2, 1)$ 是常数。受文献 [3] 的启发用 Krasnoselskii 不动点定理研究边值问题

$$\begin{cases} u'''(t) = a(t)f(t, u(t), u'(t), u''(t)) & 0 < t < 1 \\ u(0) = \delta u(\eta) & u'(1) = 0 & u''(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\delta \in (0, 1)$ 是常数。假设 $a(t) : (0, 1) \rightarrow [0, \infty)$, $f : [0, 1] \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, 其中 $a(t)$, f 都是连续的。

引理 1 边值问题

$$\begin{cases} u'''(t) = y(t) & 0 < t < 1 \\ u(0) = \delta u(\eta) & u'(1) = 0 & u''(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

有唯一解 $u(t) = \int_0^1 G(t, s)y(s) ds$,

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{s^2}{2} + \frac{\delta s^2}{2(1-\delta)} & s \leq t, s \leq \eta \\ -\frac{t^2}{2} + ts + \frac{\delta s^2}{2(1-\delta)} & t \leq s \leq \eta \\ \frac{s^2}{2} + \frac{\delta(2\eta s - \eta^2)}{2(1-\delta)} & \eta \leq s \leq t \\ -\frac{t^2}{2} + ts + \frac{\delta(2\eta s - \eta^2)}{2(1-\delta)} & \eta \leq s, t \leq s \end{cases} \quad (3)$$

证明

$$u(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (t-s)^2 y(s) ds + At^2 + Bt + C$$

$$u(0) = C, u'(1) = 0 \Rightarrow \int_0^1 y(s) ds + 2A$$

$$u(\eta) = \frac{1}{2} \int_0^\eta (\eta-s)^2 y(s) ds + A\eta^2 + B\eta + C$$

$$u'(1) = \int_0^1 (1-s)y(s) ds + 2A + B$$

代入边值, 可得

$$A = -\frac{1}{2} \int_0^1 y(s) ds, B = \int_0^1 sy(s) ds$$

$$C = \frac{\delta}{2(1-\delta)} \int_0^\eta (\eta-s)^2 y(s) ds -$$

$$\frac{\delta}{2(1-\delta)} \int_0^1 (\eta^2 - 2\eta s) y(s) ds$$

$$u(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (t-s)^2 y(s) ds - \frac{t^2}{2} \int_0^1 y(s) ds +$$

$$t \int_0^1 sy(s) ds + \frac{\delta}{2(1-\delta)} \int_0^\eta (\eta-s)^2 y(s) ds -$$

$$\frac{\delta}{2(1-\delta)} \int_0^1 (\eta^2 - 2\eta s) y(s) ds。$$

当 $t \leq \eta$ 时,

$$u(t) = \int_0^t \left(\frac{s^2}{2} + \frac{\delta s^2}{2(1-\delta)} \right) y(s) ds +$$

$$\int_t^\eta \left(-\frac{t^2}{2} + ts + \frac{\delta s^2}{2(1-\delta)} \right) y(s) ds +$$

$$\int_{\eta}^1 \left(-\frac{t^2}{2} + ts - \frac{\delta(\eta^2 - 2\eta s)}{2(1-\delta)} \right) y(s) ds$$

当 $t \geq \eta$ 时,

$$u(t) = \int_0^{\eta} \left(\frac{s^2}{2} + \frac{\delta s^2}{2(1-\delta)} \right) y(s) ds +$$

$$\int_{\eta}^t \left(\frac{s^2}{2} - \frac{\delta(\eta^2 - 2\eta s)}{2(1-\delta)} \right) y(s) ds +$$

$$\int_t^1 \left(-\frac{t^2}{2} + ts - \frac{\delta(\eta^2 - 2\eta s)}{2(1-\delta)} \right) y(s) ds$$

引理2 记 $g(s) = \frac{1}{2(1-\delta)} \min\{s^2, \eta^2\}$, 则

$$\delta g(s) \leq G(t, s) \leq g(s) \tag{4}$$

证明 当 $s \leq t, s \leq \eta$ 时, $G(t, s) \leq g(s)$ 显然成立。

$$G(t, s) = \frac{s^2}{2} + \frac{\delta s^2}{2(1-\delta)} \geq \frac{\delta s^2}{2(1-\delta)}$$

当 $t \leq s \leq \eta$ 时,

$$G(t, s) = -\frac{t^2}{2} + ts + \frac{\delta s^2}{2(1-\delta)} \leq$$

$$\frac{s^2}{2} + \frac{\delta s^2}{2(1-\delta)} = \frac{s^2}{2(1-\delta)}$$

$$G(t, s) = -\frac{t^2}{2} + ts + \frac{\delta s^2}{2(1-\delta)} \geq \frac{\delta s^2}{2(1-\delta)}$$

当 $\eta \leq s \leq t$ 时,

$$G(t, s) = \frac{s^2}{2} + \frac{\delta(2\eta s - \eta^2)}{2(1-\delta)} \leq$$

$$\frac{s^2}{2} + \frac{\delta s^2}{2(1-\delta)} = \frac{s^2}{2(1-\delta)}$$

$$G(t, s) = \frac{s^2}{2} + \frac{\delta(2\eta s - \eta^2)}{2(1-\delta)} \geq \frac{\delta \eta^2}{2(1-\delta)}$$

当 $\eta \leq s, t \leq s$ 时,

$$G(t, s) = -\frac{1}{2}t^2 + ts + \frac{\delta(2\eta s - \eta^2)}{2(1-\delta)} \leq$$

$$\frac{s^2}{2} + \frac{\delta s^2}{2(1-\delta)} = \frac{s^2}{2(1-\delta)}$$

$$G(t, s) = -\frac{t^2}{2} + ts + \frac{\delta(2\eta s - \eta^2)}{2(1-\delta)} \geq \frac{\delta \eta^2}{2(1-\delta)}$$

引理3^[8] 设 E 是一个 Banach 空间, $K \subset E$ 是锥, Ω_1, Ω_2 是 X 中有界开集, 且 $0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$, 设 $T: K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ 是全连续算子, 如果下列条件之一成立。

(1) $u \in K \cap \partial\Omega_1, \|Tu\| \leq \|u\|; u \in K \cap \partial\Omega_2, \|Tu\| \geq \|u\|$ 。

(2) $u \in K \cap \partial\Omega_1, \|Tu\| \geq \|u\|; u \in K \cap \partial\Omega_2, \|Tu\| \leq \|u\|$ 。

则 T 在 $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ 中至少存在一个不动点。

2 主要结果

设 $E = C[0, 1]$, E 是一个 Banach 空间, $\|u\| =$

$\sup_{t \in [0, 1]} |u(t)|$, 定义锥 $K \subset E$,

$$K = \{u \in E: u \geq 0, \min_{0 \leq t \leq 1} u(t) \geq \delta \|u\|\}$$

边值问题(1)式的解 $u(t)$ 可以表示成算子方程

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) a(s) f(s, u(s)) ds = Tu(t)$$

由(3)式及 f 的连续性很容易验证 T 是一个全连续算子。

引理4 $T(K) \subset K$ 。

证明 由于 $G(t, s) \geq \delta g(s) \geq 0$, 所以 $(Tu)(t) \geq$

$$0, Tu(t) \leq \int_0^1 g(s) f(s, u(s)) ds, \text{ 所以 } \|Tu(t)\| \leq$$

$$\int_0^1 g(s) a(s) f(s, u(s)) ds。$$

$$Tu(t) \geq \int_0^1 \delta g(s) a(s) f(s, u(s)) ds \geq$$

$$\delta \int_0^1 g(s) a(s) f(s, u(s)) ds \geq$$

$$\delta \|Tu(t)\|$$

$$\min_{0 \leq t \leq 1} Tu(t) \geq \delta \|Tu(t)\|$$

所以 $T(K) \subset K$ 。

为行文方便记

$$f_0 = \liminf_{u \rightarrow 0^+} \min_{t \in [0, 1]} \frac{f(t, u)}{u}$$

$$f^\infty = \limsup_{u \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, 1]} \frac{f(t, u)}{u}$$

$$f_\infty = \liminf_{u \rightarrow +\infty} \min_{t \in [0, 1]} \frac{f(t, u)}{u}$$

$$f^0 = \limsup_{u \rightarrow +\infty} \max_{t \in [0, 1]} \frac{f(t, u)}{u}$$

$$N = \left(\delta^2 \int_0^1 g(s) a(s) ds \right)^{-1}$$

$$M = \left(\int_0^1 g(s) a(s) ds \right)^{-1}$$

$$(H_1) f_0 > N, f_\infty > N$$

$$(H_2) f^0 < M, f^\infty < M$$

(H₃) 存在 $p > 0$, 使得当 $0 \leq u \leq p$ 及 $0 \leq t \leq 1$ 时, $f(t, u) < Mp$ 。

(H₄) 存在 $p > 0$, 使得当 $\delta p \leq u \leq p$ 及 $0 \leq t \leq 1$ 时, $f(t, u) > Nu$ 。

定理1 如果 (H₁) 和 (H₃) 成立, 则边值问题(1)式至少存在两个正解 u_1 和 u_2 且 $0 < \|u_1\| < p < \|u_2\|$ 。

证明 由于 $f_0 > N$, 可以找到 $\varepsilon > 0$ 以及 $0 < r_0 < p$

使得 $f(t, \mu) \geq (N + \varepsilon)u$, 对 $\forall t \in [0, 1], 0 \leq u \leq r_0$.

取 $r \in (0, r_0)$, 设 $\Omega_r = \{u \in K: \|u\| < r\}$, 则对 $\forall u \in \partial\Omega_r$, 当 $t \in [0, 1]$ 时, 有 $\delta r \leq u(t) \leq r$.

$$\begin{aligned} (Tu)(\eta) &= \int_0^1 G(\eta, s) a(s) f(s, \mu(s)) ds \geq \\ &(N + \varepsilon) \delta R \int_0^1 \delta g(s) a(s) ds > \\ &N \delta R \int_0^1 \delta g(s) a(s) ds = r = \|u\| \end{aligned}$$

所以

$$\forall u \in \partial\Omega_r, \|Tu\| > \|u\| \tag{5}$$

由于 $f_\infty > N$, 可以找到 $\varepsilon > 0$ 以及 $H > 0$ 使得 $f(t, \mu) \geq (N + \varepsilon)u$, 对 $\forall t \in [0, 1], \mu > H$.

取 $R > R_0 := \max\{H/\delta, p\}$, 设 $\Omega_R = \{u \in K: \|u\| < R\}$. $\forall u \in \partial\Omega_R$, 当 $t \in [0, 1]$ 时, 有 $u(t) \geq \delta\|u\| > H$,

$$\begin{aligned} (Tu)(\eta) &= \int_0^1 G(\eta, s) a(s) f(s, \mu(s)) ds \geq \\ &(N + \varepsilon) \delta R \int_0^1 \delta g(s) a(s) ds > \\ &N \delta R \int_0^1 \delta g(s) a(s) ds = R = \|u\| \end{aligned}$$

所以

$$\forall u \in \partial\Omega_R, \|Tu\| > \|u\| \tag{6}$$

若 (H_3) 成立, 设 $\Omega_p = \{u \in K: \|u\| < p\}$, 对 $\forall u \in \partial\Omega_p$, 当 $t \in [0, 1]$, 有 $f(t, \mu) < Mp$,

$$\begin{aligned} (Tu)(t) &\leq \int_0^1 g(s) a(s) f(s, \mu(s)) ds < \\ &Mp \int_0^1 g(s) a(s) ds = p = \|u\| \end{aligned}$$

所以

$$\forall u \in \partial\Omega_p, \|Tu\| < \|u\| \tag{7}$$

由(5)式、(6)式和(7)式以及引理3的(1)和(2)可以完成定理证明。

定理2 如果 (H_2) 和 (H_4) 成立, 则边值问题(1)式至少存在两个正解 u_1 和 u_2 且 $0 < \|u_1\| < p < \|u_2\|$.

证明 由于 $f^0 < M$, 可以找到 $\varepsilon > 0$ 以及 $0 < r_0 < p$ 使得 $f(t, \mu) \leq (M - \varepsilon)u, \forall t \in [0, 1], 0 \leq u \leq r_0$.

取 $r \in (0, r_0)$, 设 $\Omega_r = \{u \in K: \|u\| < r\}, \forall u \in \partial\Omega_r$, 当 $t \in [0, 1]$ 时, 有 $\delta r \leq u(t) \leq r$.

$$\begin{aligned} (Tu)(t) &\leq \int_0^1 g(s) a(s) f(s, \mu(s)) ds \leq \\ &(M - \varepsilon) r \int_0^1 g(s) a(s) ds < \\ &Mr \int_0^1 g(s) a(s) ds = r = \|u\| \end{aligned}$$

可得

$$\forall u \in \partial\Omega_r, \|Tu\| < \|u\| \tag{8}$$

由于 $f^\infty < M$, 可以找到 $\varepsilon > 0$ 以及 $H > 0$ 使得 $f(t, u) \leq (M - \varepsilon)u$, 对

$$\forall t \in [0, 1], \mu > H \tag{9}$$

分两种情况进行考虑

(1) 当 $u \in [0, \infty)$, $\max_{t \in [0, 1]} f(t, \mu)$ 是无界的则可以取 $R > r + p$, 使得 $f(t, \mu) \leq \max_{t \in [0, 1]} f(t, R)$, 对

$$\forall u \in (0, R], t \in [0, 1] \tag{10}$$

由于 $\max_{t \in [0, 1]} f(t, \mu)$ 在 $u \in [0, \infty)$ 上是无界以及(9)式和(10)式, 当 $u \in K$ 和 $\|u\| = R$ 可得

$$\begin{aligned} (Tu)(t) &\leq \int_0^1 g(s) a(s) \max_{t \in [0, 1]} f(t, R) ds \leq \\ &(M - \varepsilon) R \int_0^1 g(s) a(s) ds < \\ &MR \int_0^1 g(s) a(s) ds = R = \|u\| \end{aligned}$$

可得 $\|Tu\| < \|u\|$, 对 $\forall u \in \partial\Omega_R$.

(2) 如果 $\max_{t \in [0, 1]} f(t, \mu)$ 在 $u \in [0, \infty)$ 上是有界的, 设 $f(t, \mu) \leq L$, 对 $\forall u \geq 0, t \in [0, 1]$. 设 $R > p + L/M$, 当 $u \in K$ 和 $\|u\| = R$

$$\begin{aligned} (Tu)(t) &\leq \int_0^1 g(s) a(s) f(s, \mu(s)) ds \leq \\ &L/M < R = \|u\| \end{aligned}$$

设 $\Omega_R = \{u \in K: \|u\| < R\}$ 无论哪种情形都有

$$\forall u \in \partial\Omega_R, \|Tu\| < \|u\| \tag{11}$$

若 (H_4) 成立, $f(t, \mu) > Nu$, 对 $\forall t \in [0, 1], \delta p \leq u \leq p$, 设 $\Omega_p = \{u \in K: \|u\| < p\}$, 对 $\forall u \in \partial\Omega_p, t \in [0, 1]$, 有

$$\begin{aligned} (Tu)(\eta) &= \int_0^1 G(\eta, s) a(s) f(s, \mu(s)) ds > \\ &N \delta P \int_0^1 \delta g(s) a(s) ds = p = \|u\| \end{aligned}$$

所以

$$\forall u \in \partial\Omega_p, \|Tu\| > \|u\| \tag{12}$$

由(8)式、(11)式、(12)式及引理3的(1)和(2)可以完成定理2证明。

参考文献:

[1] 马如云. 非线性常微分方程非局部问题[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
 [2] 葛渭高. 非线性常微分方程边值问题[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

- [3] Sun Yongping. Existence of triple positive solutions for a third-order three-point boundary value problem [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 2008, 221(1): 194-201.
- [4] Li Jianli, Shen Jianhua. Multiple positive solutions for a second-order three-point boundary value problem [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 182(2): 258-268.
- [5] Xu Xiaojie, Jiang Daqing, Yuan Chengjun. Multiple positive solutions for the boundary value problem of a nonlinear fractional differential equation [J]. *Nonlinear Analysis* 2009, 71(10): 4676-4688.
- [6] 陈春香. 非线性三点边值问题对称正解的存在性与多解性 [J]. *四川理工学院学报: 自然科学版*, 2010, 23(6): 654-656.
- [7] 马如云. 一类非线性 m 点边值问题正解的存在性 [J]. *数学学报* 2003, 46(6): 785-794.
- [8] Krasnoselskii M A. Positive solutions of operator equations [M]. Groningen: Noordhoff, 1964.

Existence of Positive Solutions for a Third-order Three-point Boundary Value Problem

ZHENG Ting, ZHU Si-nian, GUAN Qi

(1. College of Science, China University Mining and Technology, Xuzhou 221008, China)

Abstract: We study the existence of two positive solutions for the third-order three-point boundary value problem, $u'''(t) = a(t)f(t, u(t))$, $u(0) = \delta u(\eta)$, $u''(1) = 0$, $u'(1) = 0$, the corresponding Green's function is given, we convert the existence of solutions for the boundary value problem into the existence of fixed point of an integral operator equation. A cone on a Banach space is well defined, by using Krasnoselskii's fixed point theorem combined with the properties of Green function, we establish sufficient conditions for the existence of two positive solutions to the boundary value problem.

Key words: third-order three-point; Krasnoselskii's fixed-point theorem; positive solutions