

# 一类非线性分数阶 $m$ 点边值问题可数多正解的存在性

朱思念, 王 刚

(中国矿业大学理学院, 江苏 徐州 221008)

摘 要: 目前关于分数阶微分方程多点边值问题的研究还不多见, 受相关文献启发, 文章讨论一类分数阶多点边值问题正解的存在性, 运用锥上的不动点指数结合相应的格林函数, 得出了可数多正解的存在性, 推广了一些整数阶的相关结果。

关键词: 分数阶; 不动点指数; 正解

中图分类号: O175. 8

文献标识码: A

## 引 言

近年来, 对于整数阶多点边值问题的研究取得了许多优秀的成果<sup>[1-4]</sup>, 目前对于分数阶微分方程的研究成为人们关注的热点之一, 许多学者致力于非线性分数阶微分方程解的研究, 并得到了很多优秀的结果。

然而对于分数阶微分方程多点边值问题的研究的相关文献并不多见<sup>[5-7]</sup>, 在文献[5]中, 作者讨论了如下分数阶微分方程多点边值问题解的存在性:

$$\begin{cases} {}_R D u(t) + f(t, u(t)) = 0 \\ u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0 \\ u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\eta_i) \end{cases}$$

其中  $n \geq 2, \rho > 0 (i = 1, 2, \dots, m-2), \rho < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{m-2} < 1, f \in C([0, 1] \times R, R), {}_R D$  为  $R-L$  分数阶微分。作者使用非线性抉择得到了非平凡解的存在性。

在文献[1]中作者讨论了以下  $n$  阶微分方程边值问题:

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) + a(t)f(u(t)) = 0, t \in (0, 1) \\ u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0 \\ u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} k_i u(\xi_i) \end{cases}$$

其中  $a(t) \in L^p[0, 1], p \geq 1, \mu(t)$  在  $[0, \frac{1}{2})$  上有无穷

多奇异点。作者使用锥拉伸压缩不动点定理得出无穷多解的存在性。

受文献[1, 5]启发, 本文考虑一类分数阶多点边值问题的多解性:

$$\begin{cases} D_{0+}^\alpha u(t) + a(t)f(t, u(t)) = 0, n-1 < \alpha \leq n \quad (1) \\ u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0 \\ u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i) \quad (2) \end{cases}$$

其中  $n > 2, \mu_i > 0 (i = 1, 2, \dots, m-2), t \in [0, 1], \rho < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-2} < 1, f \in C([0, 1] \times [0, +\infty), [0, +\infty)), a(t) \in L^1[0, 1], \mu(t) \geq 0$  且在  $[0, \frac{1}{2})$  上有无穷多奇异点。本文所使用的定理为不动点指数定理。

## 1 准备知识和相关引理

定义 1<sup>[8]</sup> 函数  $y: (0, +\infty) \rightarrow R$  的  $\alpha$  阶 Riemann - Liouville 分数阶积分为  $I_{0+}^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds$ , 其中  $\alpha > 0, \Gamma(\cdot)$  为 gamma 函数。

定义 2<sup>[8]</sup> 连续函数  $y: (0, +\infty) \rightarrow R$  的  $\alpha$  阶 Riemann - Liouville 分数阶导数为

$$D_{0+}^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds$$

其中  $\alpha > 0, \Gamma(\cdot)$  为 gamma 函数,  $n = [\alpha] + 1$ 。

引理 1<sup>[8]</sup> 若  $\alpha > 0, \mu \in C(0, 1) \cap L^1(0, 1)$ , 存在

$c_i \in R, i = 1, 2, \dots, N$ , 使得  $I_{0+}^\alpha D_{0+}^\alpha u(t) = u(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \dots + c_N t^{\alpha-N}$ , 其中  $N = [\alpha] + 1$ 。

引理2 边值问题(1)式、(2)式有唯一解

$$u(t) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i} \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} a(s) f(s, \mu(s)) ds - \frac{t^{\alpha-1}}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i} \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} \frac{(\xi_i - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} a(s) f(s, \mu(s)) ds - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} a(s) f(s, \mu(s)) ds \quad (3)$$

其中  $1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i > 0$ 。

证明 由引理1和边界条件(2)式易得 从略。

引理3 边值问题(1)式、(2)式对应的 Green 函数为

$$G(t, s) = g(t, s) + \frac{t^{\alpha-1}}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i} \sum_{i=1}^{m-2} a_i g(\xi_i, s)$$

其中

$$g(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1}, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

事实上,由(3)式

$$u(t) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i} \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} a(s) f(s, \mu(s)) ds - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} a(s) f(s, \mu(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[ - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s) f(s, \mu(s)) ds + \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} a(s) f(s, \mu(s)) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i} \int_0^1 \xi_i (1-s)^{\alpha-1} - \frac{t^{\alpha-1}}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i} \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s)^{\alpha-1} a(s) f(s, \mu(s)) ds \right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1} a(s) f(s, \mu(s)) ds + \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} a(s) f(s, \mu(s)) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i} \left[ \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s)^{\alpha-1} - \right. \right.$$

$$\left. (1-s)^{\alpha-1} a(s) f(s, \mu(s)) ds + \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} (1-s)^{\alpha-1} a(s) f(s, \mu(s)) ds \right\} = \int_0^1 G(t, s) a(s) f(s, \mu(s)) ds$$

定义算子:

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t, s) a(s) f(s, \mu(s)) ds \quad (4)$$

则边值问题(1)式、(2)式的解等价于算子  $T$  的不动点问题类似于文献[5]中的引理3.3。

引理4

- (1)  $g(t, s) \geq 0, \forall t, s \in [0, 1]$ 。
- (2)  $g(t, s) = g(1-t, 1-s), \forall t, s \in [0, 1]$ 。
- (3)  $g(t, s) \leq g(\tau(s), s)$ , 其中  $\tau(s) = \frac{s}{1-(1-s)^{\frac{1}{\alpha}}}$  ( $s < \tau(s) < 1$ ),  $\forall t, s \in [0, 1]$ 。
- (4) 存在常数  $\gamma(\tau) > 0$ , 使得对于任意的  $\tau \in (0, \frac{1}{2})$ ,  $\min_{t \in [\tau, 1-\tau]} g(t, s) \geq \gamma(\tau) g(\tau(s), s) \geq \gamma(\tau) g(t', s)$  其中  $\gamma(\tau) = \min\left\{ \left(\frac{\tau}{\tau(s)}\right)^{\alpha-1}, \frac{\tau}{1-\tau(s)} \right\}$ 。

引理5

- (1)  $G(t, s) \geq 0$ 。
- (2)  $G(t, s) \leq k(s), \forall t, s \in [0, 1]$ , 其中  $k(s) = g(\tau(s), s) + (1/1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i) \sum_{i=1}^{m-2} a_i g(\xi_i, s)$ 。
- (3) 存在常数  $\widehat{\gamma}(\tau) > 0$ , 使得对任意的  $\tau \in (0, \frac{1}{2})$ , 有

$$\min_{t \in [\tau, 1-\tau]} G(t, s) \geq \widehat{\gamma}(\tau) k(s) \geq \widehat{\gamma}(\tau) G(t', s) \quad \forall t \in [0, 1] \quad (5)$$

证明 (1)显然,仅证(2)、(3)。由引理4(3)、(4),

$$G(t, s) = g(t, s) + \frac{t^{\alpha-1}}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i} \sum_{i=1}^{m-2} a_i g(\xi_i, s) \leq g(\tau(s), s) + \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i} \sum_{i=1}^{m-2} a_i g(\xi_i, s) = k(s)$$

对  $t \in [\tau, 1-\tau]$ ,

$$G(t, s) = g(t, s) + \frac{t^{\alpha-1}}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i} \sum_{i=1}^{m-2} a_i g(\xi_i, s) \geq \gamma(\tau) g(\tau(s), s) + \frac{t^{\alpha-1}}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i} \sum_{i=1}^{m-2} a_i g(\xi_i, s) \geq$$

$$\widehat{\gamma(\tau)} \left\{ g(\tau(s)) \cdot s + \frac{\tau^{\alpha-1}}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i \xi_i} \sum_{i=1}^{m-2} a_i g(\xi_i(s)) \right\}$$

其中  $\widehat{\gamma(t)} = \min\{\gamma(\tau) \cdot \tau^{\alpha-1}\}$ 。

定义锥  $P_\tau = \{u \in E \mid u(t) \geq 0, t \in [0, 1], \min_{t \in [\tau, 1-\tau]} u(t) \geq \gamma(\tau) \|u\|\}$ 。

引理 6 算子  $T$  是全连续算子, 并且  $T: P_\tau \rightarrow P_\tau$ 。

证明 设  $u \in P_\tau$ , 因为  $a(s)f(s, \mu(s)) \geq 0, G(t, s) \geq 0$ , 对  $\forall s, t \in [0, 1]$ , 所以  $Tu \geq 0$  由 (4) 式、(5) 式,

$$\begin{aligned} \min_{t \in [\tau, 1-\tau]} u(t) &= \min_{t \in [\tau, 1-\tau]} \int_0^1 G(t, s) a(s) f(s, \mu(s)) ds \geq \\ & \int_0^1 \min_{t \in [\tau, 1-\tau]} G(t, s) a(s) f(s, \mu(s)) ds \geq \\ & \widehat{\gamma(\tau)} \int_0^1 G(t, s) a(s) f(s, \mu(s)) ds \geq \\ & \gamma(\tau) Tu(t) \end{aligned}$$

由  $t'$  的任意性知,  $\min_{t \in [\tau, 1-\tau]} u(t) \geq \gamma(\tau) \|Tu\|$ 。

本文所使用的不动点指数定理。

引理 7<sup>[8]</sup> 设  $E$  是 Banach 空间,  $P \subset E$  是  $E$  上的锥。设  $r > 0$ , 定义  $\Omega_r = \{x \in P: \|x\| < r\}$ 。假设  $T: P \cap \Omega_r \rightarrow P$  是全连续算子, 使得  $Tx \neq x$ , 当  $x \in \partial\Omega_r$ ,

(1) 若对  $x \in \partial\Omega_r, \|Tx\| \leq \|x\|$ , 则  $i(T, \Omega_r, P) = 1$ 。

(2) 若对  $x \in \partial\Omega_r, \|Tx\| \geq \|x\|$ , 则  $i(T, \Omega_r, P) = 0$ 。

## 2 主要结果

假设  $a(t)$  满足

$$\int_0^1 G(t, s) a(s) ds < +\infty, \int_0^1 a(s) ds < +\infty$$

为行文方便, 记

$$\lambda_1 = \frac{1}{\max_{t \in [\tau_1, 1-\tau_1]} \int_{\tau_1}^{1-\tau_1} G(t, s) a(s) ds}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\|k(s)\| \|a\|_{L^1}}$$

定理 1 令  $t_k < \tau_k < t_{k+1} < \dots < \frac{1}{2}, k = 1, 2, \dots$ ,

设  $R_{k-1} < \widehat{\gamma(\tau_k)} r_k < r_k < R_k, k = 1, 2, \dots, Mr_k < LR_k, M > \lambda_1, 0 < L < \lambda_2$ , 假设下面两个条件满足:

(1)  $f(t, \mu(t)) \leq LR_{k+1}$ , 对任意的  $t \in [0, 1], \mu \in [0, R_k]$ 。

(2)  $f(t, \mu(t)) \geq Mr_k$ , 对任意的  $t \in [\tau_k, 1 - \tau_k], \mu \in [\gamma_{\tau_k} r_k, r_k]$ 。

证明 考虑序列  $\{\Omega_{1k}\}_{k=1}^\infty, \{\Omega_{2k}\}_{k=1}^\infty$ , 具体定义为

$$\Omega_{1k} = \{y \in P: \|y\| < r_k\}, \Omega_{2k} = \{y \in P: \|y\| < R_k\}$$

则对每个固定的  $k$ , 由于  $t_k < \tau_k < t_{k+1} < \frac{1}{2}$ , 定义锥  $P_k$  为

$$P_k = \{u \in E \mid u(t) \geq 0, t \in [0, 1],$$

$$\min_{t \in [\tau_k, 1-\tau_k]} u(t) \geq \gamma_{\tau_k} \|u\|\}$$

若  $u \in P_k \cap \partial\Omega_{1k}$ , 对  $s \in [\tau_k, 1 - \tau_k]$ , 有

$$\gamma_{\tau_k} r_k = \gamma_{\tau_k} \|u\| \leq \min_{s \in [\tau_k, 1-\tau_k]} u(s) \leq u(s) \leq \|u\| = r_k$$

则由定理 1 条件 (2) 知

$$\begin{aligned} \|Tu(t)\| &= \max_{t \in [0, 1]} \int_0^1 G(t, s) a(s) f(s, \mu(s)) ds \geq \\ & \max_{t \in [0, 1]} \int_{\tau_k}^{1-\tau_k} G(t, s) a(s) f(s, \mu(s)) ds \geq \\ & \max_{t \in [0, 1]} \int_{\tau_k}^{1-\tau_k} G(t, s) a(s) ds \cdot Mr_k \geq \\ & Mr_k \cdot \max_{t \in [0, 1]} \int_{\tau_k}^{1-\tau_k} G(t, s) a(s) ds \geq r_k = \|u\| \end{aligned}$$

故由引理 7 知,  $i(T, \Omega_{1k}, P) = 0$ 。

令  $u \in P_k \cap \partial\Omega_{2k}$ , 则由定理 1 条件 (1) 知

$$\begin{aligned} \|Tu(t)\| &= \max_{t \in [0, 1]} \int_0^1 G(t, s) a(s) f(s, \mu(s)) ds \leq \\ & \|k(s)\| \|a\|_{L^1} \cdot LR_k \leq R_k = \|u\| \end{aligned}$$

故由引理 7 知  $i(T, \Omega_{2k}, P) = 1$ , 由不动点指数的可加性, 知  $i(T, \Omega_{2k} \setminus \overline{\Omega_{1k}}, P_k) = 1$ , 故  $T$  在  $\Omega_{2k} \setminus \overline{\Omega_{1k}}$  上至少有一个不动点, 并且使得  $r_k \leq \|u\| \leq R_k$ , 由  $k$  的任意性知,  $T$  有可数多不动点, 因此边值问题 (1) 式和 (2) 式有可数多正解, 证毕。

### 参考文献:

- [1] Ji Yude, Guo Yanping. The existence countably of many positive solutions for some nonlinear fractional order  $m$ -point boundary value problems [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 232: 187-200.
- [2] Pang Changci, Dong Wei, Wei Zhongli. Green function and positive solutions of  $n$ th order  $m$ -point boundary value problem [J]. Applied Mathematics & Computation 2006, 182: 1231-1239.
- [3] Wei Yuming, Patricia J Y Wong, Ge W G. The existence of multiple positive solutions to boundary value problems of nonlinear delay differential equations with countably many singularities on infinite interval

- [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics 2010 233: 2189-2199.
- [4] 陈春香,徐四委. 非线性三点边值问题对称正解的存在性和多解性[J]. 四川理工学院学报:自然科学版 2010,12(6):654-656.
- [5] Moustafa El-Shahed, Juan J Nieto. Nontrivial solutions for nonlinear multi-point boundary value problem of fractional order [J]. Computers & Mathematics with Applications 2010, 59: 3438-3443.
- [6] Jiang Daqing, Yuan Chengjun. The positive properties of the Green function for Dirichlet-type boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and its application [J]. Nonlinear Anal. 2010, 72: 710-719.
- [7] Delmilin K. Nonlinear Analysis [M]. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [8] Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. Theory and applications of fractional differential equations [M]. Amsterdam, Elsevier B V 2006.
- [6] Jiang Daqing, Yuan Chengjun. The positive properties

## Existence of Countably Many Positive Solutions for Some Nonlinear Fractional Order $M$ -point Boundary Value Problem

ZHU Si-nian, WANG Gang

(College of Science, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, China)

**Abstract:** Not so many papers discuss multi-point fractional order boundary value problems. Inspired by related works, in this paper, we consider the existence of positive solutions for some nonlinear fractional order  $m$ -point boundary value problem. By using the fixed-point index theory in a cone combined with associated Green function, we show that there exists countably many positive solutions, so it can be seen as a promotion of integer-order boundary value problem.

**Key words:** fractional order; fixed-point index; positive solutions