

# 拓扑空间中函数上(下)极限的一些性质

卢天秀<sup>1,2</sup>, 朱培勇<sup>2</sup>, 辛邦颖<sup>3</sup>

(1. 四川理工学院理学院, 四川 自贡 643000; 2. 电子科技大学数学科学学院, 成都 611731;

3. 西昌学院汽车与电子工程学院, 四川 西昌 615013)

**摘要:**结合拓扑空间的特性讨论函数上(下)极限,得到了一些与实直线上几乎一致的结果。首先给出了拓扑空间中函数上(下)极限的定义。然后证明了满足第一可数性公理的拓扑空间中函数上(下)极限是子极限集的最大(小)元。针对在某点存在单调递减的可数邻域基的函数,得到了上(下)极限的等价条件和几个性质。

**关键词:**拓扑空间; 上(下)极限; 第一可数

**中图分类号:** O189.11

**文献标识码:** A

上世纪末到本世纪初,许多学者讨论了上(下)极限各种定义的等价性和上(下)极限的性质<sup>[1-4]</sup>,但都没有超出实直线的范围。那么,在比实直线范围更广的拓扑空间上,如何定义上(下)极限,上(下)极限又有何性质,本文首先将上(下)极限的定义推广到了一般拓扑空间,定义方式与文献[5]类似。然后指出拓扑空间中函数的上(下)极限可以看作函数的子极限集合的上(下)确界。最后讨论了满足第一可数性公理的拓扑空间中函数上(下)极限的性质,以及在某点存在单调递减的可数邻域基的函数的上(下)极限的等价条件。

本文用 $\mu(x)$ 表示点 $x \in X$ 的邻域系, $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 分别表示自然数集和实数集。若 $E \subset X$ , $E'$ 表示 $E$ 的导集。拓扑空间中的有关概念和基本性质见文献[6-8]。

**定义 1**<sup>[8]</sup> 称拓扑空间 $X$ 是第一可数的(或称 $X$ 为 $A_1$ 空间)如果对于 $\forall x \in X$ ,点 $x$ 有一个至多可数的邻域基。

**定义 2** 设 $X$ 是一个拓扑空间, $E \subset X$ , $f(x)$ 在 $E$ 上有定义, $x_0 \in E'$ ,称实数 $A$ 为 $f(x)$ 在 $x_0$ 的子极限。如果 $\exists x_n \in E \setminus \{x_0\}$ 使得当 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 时,有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 。

**定义 3** 设 $A \in [-\infty, +\infty]$ ,如果 $A$ 为 $f(x)$ 在 $x_0$ 处所有子极限的上确界,则称 $A$ 为 $f(x)$ 在 $x_0$ 点的上极限,记为: $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ;类似地,如果 $B$ 为 $f(x)$ 在 $x_0$ 处所有

子极限的下确界,则称 $B$ 为 $f(x)$ 在 $x_0$ 点的下极限,记为 $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 。

记 $Z(x_0) = \{ \alpha | \alpha \text{ 为 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处的子极限} \}$  则

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup Z(x_0)$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf Z(x_0)$$

**引理 1**<sup>[8]</sup> 设拓扑空间 $X$ 为 $A_1$ 空间, $\forall x \in X$ ,则 $X$ 中必存在 $x$ 的一个单调递减的可数邻域基 $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,即, $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} \subset V_n$ 。

将实直线上函数上(下)极限的一些性质推广到满足第一可数性公理的拓扑空间上。

**定理 1** 设 $X$ 是满足第一可数性公理的拓扑空间, $E \subset X$ 并且 $x_0 \in E'$ ,则对于任何 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,必有

$$(1) \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup Z(x_0) \in Z(x_0)$$

$$(2) \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf Z(x_0) \in Z(x_0)$$

即, $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 和 $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 分别为 $Z(x_0)$ 中的最大元与最小元。

**证明** 记 $H = \sup Z(x_0)$ ,并且取点 $x_0$ 的单调递减可数邻域基 $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,对于 $\forall n \in \mathbb{N}$ ,取 $\varepsilon_n = 1/n > 0$ ,则 $\exists \alpha_n \in Z(x_0)$ 使得 $H - \varepsilon_n < \alpha_n \leq H + \varepsilon_n$ 。因为 $\alpha_n \in Z(x_0)$ ,故对于 $\forall k \in \mathbb{N}$ ,必然有 $x_k^{(n)} \in E \cap V_k \setminus \{x_0\}$ ,

则  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = x_0$ 。由于  $\alpha_n$  是  $f(x)$  在  $x_0$  处的子极限, 进而  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k^{(n)}) = \alpha_n$ , 即对于  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k(n) \in \mathbb{N}$  使得  $\forall k > k(n)$  有  $H - \varepsilon_n < f(x_k^{(n)}) < H + \varepsilon_n$  并且  $x_k^{(n)} \in V_k$ 。特别地, 对于  $n = 1, \exists k_1 \in \mathbb{N}$  使得  $x_{k_1}^{(1)} \in V_1$  并且  $f(x_{k_1}^{(1)}) \in (\alpha_1 - \varepsilon_1, \alpha_1 + \varepsilon_1)$ , 从而  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(1)} = x_0$  并且  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k^{(1)}) = \alpha_1$ , 对于  $n = 2, \exists k_2 > k_1$ , 有  $x_{k_2}^{(2)} \in V_2$  并且  $f(x_{k_2}^{(2)}) \in (\alpha_2 - \varepsilon_2, \alpha_2 + \varepsilon_2)$ , 如此继续进行下去, 得到点列  $x_{k_n}^{(n)} \in E$  且  $x_{k_n}^{(n)} \in V_n, f(x_{k_n}^{(n)}) \in (H - \varepsilon_n, H + \varepsilon_n)$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k_n}^{(n)} = x_0, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{k_n}^{(n)}) = H \in Z(x_0)$ , 故(1)真。同理可证(2)真。

由此, 有如下结果:

**定理 2** 设  $X$  是满足第一可数性公理的拓扑空间,  $E \subset X, x_0 \in E'$  并且点  $x_0$  有单调递减的可数邻域基  $\{V_k\}_{k=1}^\infty$ , 若  $f(x)$  在  $E$  上有定义并且  $A$  为有限数, 则下列三个命题等价:

(1)  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

(2)  $f(x)$  在  $x_0$  附近同时满足:

①  $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall x \in V_k, \text{有 } f(x) < A + \varepsilon$ 。

②  $\forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists x \in V_k, \text{有 } f(x) > A - \varepsilon$ 。

(3)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in E \cap V_k} f(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{x \in E \cap V_k} f(x) = A$

**证明** 按(1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (1) 进行循环证明。

(1)  $\Rightarrow$  (2) 由定理 1 知,  $A \in Z(x_0)$ , 则  $\exists \{x_n\} \subset E \setminus \{x_0\}$  使得  $x_n \rightarrow x_0$ , 并且  $f(x_n) \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$ , 可知②成立。

对于①, 用反证法。假设  $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists x \in V_k, \text{有 } f(x) \geq A + \varepsilon_0$ 。对  $k_1 \in \mathbb{N}, \exists x_1 \in V_{k_1}, \text{有 } f(x_1) \geq A + \varepsilon_0$ , 取  $k_{i+1} \geq k_i + i$  使得  $x_i \notin V_{k_{i+1}}$ , 则  $x_1, \dots, x_{i-1} \notin V_{k_{i+1}}, \exists x_{i+1} \in V_{k_{i+1}}, \text{有 } f(x_{i+1}) \geq A + \varepsilon_0$ 。如此得到一个序列  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , 由于  $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  附近有界, 即  $f(x_n)$  有界, 则  $\exists x_{n_i} \in E (x_{n_i} \neq x_0)$  使得  $x_{n_i} \rightarrow x_0$ , 且  $f(x_{n_i})$  是收敛的, 于是得到  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \inf_{x \in E \cap V_k} f(x) \geq A + \varepsilon_0$ , 这与  $\sup Z(x_0) = A$  矛盾。

(2)  $\Rightarrow$  (3)。由①知:  $\forall \varepsilon > 0, \exists k(\varepsilon) > 0, \forall x \in E \cap V_{k(\varepsilon)} \text{有 } f(x) < A + \frac{\varepsilon}{2}$ , 故:

$$\sup_{x \in E \cap V_{k(\varepsilon)}} f(x) \leq A + \frac{\varepsilon}{2} < A + \varepsilon$$

而对于  $\forall k > k(\varepsilon)$ , 有

$$\sup_{x \in E \cap V_k} f(x) \leq \sup_{x \in E \cap V_{k(\varepsilon)}} f(x) < A + \varepsilon$$

因此,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in E \cap V_k} f(x) = A$ 。

**证**  $\inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{x \in E \cap V_k} f(x) = A$ , 即证明  $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}$  使得  $A \leq \sup_{x \in E \cap V_k} f(x) < A + \varepsilon$ 。事实上,  $\exists x_n \in E (x_n \neq x_0)$ ,

使得当  $x_n \rightarrow x_0$  时  $f(x_n) \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$ , 即  $A \leq$

$$\sup_{x \in E \cap V_k} f(x)$$
。因此,  $\inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{x \in E \cap V_k} f(x) = A$ 。

(3)  $\Rightarrow$  (1) 若  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in E \cap V_k} f(x) = A$ , 则  $\forall \varepsilon_n > 0 (\varepsilon_n = \frac{1}{n}), \exists k_n \in \mathbb{N}$  使得  $\forall k \geq k_n$  时, 有

$$|\sup_{x \in E \cap V_k} f(x) - A| < \varepsilon_n$$

特别地, 有  $A - \varepsilon_n < \sup_{x \in E \cap V_{k_n}} f(x) < A + \varepsilon_n$ , 可取  $x_n \in E \cap V_{k_n}$  使得  $|f(x_n) - A| < \varepsilon_n$ , 因此, 存在  $\{x_n\} \subset E$  使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  并且  $f(x_n) \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$ , 故  $A$  为  $f(x)$  在  $x_0$  的子极限, 即  $A \in Z(x_0)$ 。

**证明**  $A$  为  $Z(x_0)$  中的最大元。

事实上, 对于  $\forall B > A$ , 则有自然数  $n$  使得  $A + \frac{1}{n} < B$ , 而由  $A = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{x \in E \cap V_k} f(x)$  知:  $\exists k(n) \in \mathbb{N}$  使得

$$\sup_{x \in E \cap V_{k(n)}} f(x) < A + \frac{1}{n} < B$$

因此, 对于  $\forall x \in E \cap V_{k(n)}$ , 有  $f(x) < A + \frac{1}{n} < B$ ,

即  $B$  不可能为  $f(x)$  在点  $x_0$  的子极限, 因此  $A$  为  $Z(x_0)$  中的最大元。

在定理 2 中, 如果定义  $W_f^*(x_0, k) = \sup_{x \in E \cap V_k} f(x)$  不难看出, 数列  $\{W_f^*(x_0, k)\}_{k=1}^\infty$  关于  $k$  单调递减的。

类似于定理 2, 关于下极限有如下结论:

**推论 1** 设  $X$  是一个拓扑空间,  $E \subset X, x_0 \in E'$  并且点  $x_0$  有单调递减的可数邻域基  $\{V_k\}_{k=1}^\infty$ 。若  $f(x)$  在  $E$  上有定义并且  $B$  为有限数, 则下列三个命题等价:

(1)  $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$

(2)  $f(x)$  在  $x_0$  附近同时满足:

①  $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall x \in V_k, \text{有 } f(x) > B - \varepsilon$ 。

②  $\forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists x \in V_k, \text{有 } f(x) < B + \varepsilon$ 。

(3)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{x \in E \cap V_k} f(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{x \in E \cap V_k} f(x) = B$

同样, 如果定义  $V_f^*(x_0, k) = \inf_{x \in E \cap V_k} f(x)$ , 不难得知:

数列  $\{V_f^*(x_0, k)\}_{k=1}^\infty$  关于  $k$  单调递增。

**推论 2** 设  $X$  是一个拓扑空间,  $E \subset X, x_0 \in E'$  并且点  $x_0$  有单调递减的可数邻域基  $\{V_k\}_{k=1}^\infty$ , 则下面几条成立:

(1)  $f(x)$  在  $x_0$  附近有界, 则  $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x), \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$  必有限。

(2)  $B = \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

(3)  $\forall a \in Z(x_0)$ , 恒有:  $B \leq a \leq A$ 。

(4)  $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall x \in E \cap V_k \text{有 } A + \varepsilon > f(x) > B - \varepsilon$ 。

(5)  $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  当且仅当  $\overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)} = A$ 。

下面给出拓扑空间中函数上下极限的另外两条性质。

**定理3 (保序性)** 设  $X$  是一个拓扑空间,  $E \subset X$ ,  $x_0 \in E'$  并且点  $x_0$  有单调递减的可数邻域基  $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ , 如果  $f(x)$  与  $g(x)$  均在  $E$  上有定义 并且  $\exists k_0 \in \mathbb{N}$  使得  $\forall x \in E \cap V_k$  恒有  $f(x) \leq g(x)$ , 则下列不等式同时成立:

$$(1) \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)} \leq \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

$$(2) \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

**证明** 因为  $\forall x \in E \cap V_{k_0}$ , 恒有  $f(x) \leq g(x)$ , 则  $\forall k \geq k_0$ , 有

$$W_f^*(x_0, k) = \sup_{x \in E \cap V_k} f(x) \leq \sup_{x \in E \cap V_k} g(x) = W_g^*(x_0, k)$$

故

$$\overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in E \cap V_k} f(x) \leq$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in E \cap V_k} g(x) = \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

从而 (1) 真。

同理, 因为  $f(x) \leq g(x)$ , 则  $\forall k \geq k_0$ , 也有

$$V_f^*(x_0, k) = \inf_{x \in E \cap V_k} f(x) \leq \inf_{x \in E \cap V_k} g(x) = V_g^*(x_0, k)$$

于是

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{x \in E \cap V_k} f(x) \leq$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{x \in E \cap V_k} g(x) = \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

从而 (2) 真。

**定理4** 设  $X$  是一个拓扑空间,  $E \subset X$ ,  $x_0 \in E'$ , 并且点  $x_0$  有单调递减的可数邻域基  $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ , 如果  $f(x)$  与  $g(x)$  均在  $E$  上有定义且有界, 则:

$$(1) \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)} + \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)} \leq \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))}$$

$$(2) \max \{ \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)} + \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)} + \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)} \}$$

$$\} \leq \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)} + \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)}$$

**证明** (1) 因为  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $E$  上均有界, 故对于  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_n \in E \cap V_n$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , 得到  $\inf f(x) + \inf g(x) \leq f(x) + g(x)$ , 从而

$$\inf f(x) + \inf g(x) \leq \inf (f(x) + g(x))$$

将  $x$  换成  $x_n$  然后使  $n \rightarrow \infty$ , 便得到要证明的不等式。类似地 (2) 也成立。

**参考文献:**

- [1] 沈波. 数列与相应函数列的上、下极限间关系探讨[J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版, 2005, 22(4): 100-102.
- [2] 杨辉, 宛金龙. 数列上、下极限的注记[J]. 安庆师范学院学报: 自然科学版, 2004, 10(3): 72-73.
- [3] 孟凡友, 金俊, 王冰. 关于集列上、下极限的进一步研究[J]. 牡丹江师范学院学报: 自然科学版, 2002(4): 9-10.
- [4] 黄世团. 关于上(下)极限几种定义的等价性[J]. 桂林市教育学院学报: 综合版, 1997, 31(1): 70-72.
- [5] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [6] 卢天秀, 朱培勇. 线性序拓扑空间上不稳定流形的映射性质[J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2009, 22(4): 32-34.
- [7] 汤磊, 胡珍华, 吴中华. 弱准连续与弱  $\partial$  连续函数的分解[J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2009, 22(2): 13-15.
- [8] 朱培勇, 雷银彬. 拓扑学导论[M]. 北京: 科学出版社, 2009.

## Some Properties of Upper and Lower Limits of a Function on Topological Space

LU Tian-xiu, ZHU Pei-yong, XIN Bang-ying

(1. School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China;

2. School of Mathematical Science, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China;

3. School of Automotive and Electronic Engineering, Xichang College, Xichang 615013, China)

**Abstract:** Combined with properties of topological space, this paper discussed the upper and lower limits of a function, obtained some results which relatively similar to the ones on real line. First, the concept of upper and lower limits of a function in topological space is defined. Then it is proved that upper and lower limits of a function on first-countable topological space is the largest (smallest) element of sub-limit set. Also, the equivalent conditions and some properties of the function with monotone decreasing countable neighborhood basis at a point are obtained.

**Key words:** topological space; upper and lower limits; first-countable