

拓扑空间中函数上(下)极限的一些性质

卢天秀^{1,2}, 朱培勇², 辛邦颖³

(1. 四川理工学院理学院, 四川 自贡 643000; 2. 电子科技大学数学科学学院, 成都 611731;

3. 西昌学院汽车与电子工程学院, 四川 西昌 615013)

摘要:结合拓扑空间的特性讨论函数上(下)极限,得到了一些与实直线上几乎一致的结果。首先给出了拓扑空间中函数上(下)极限的定义。然后证明了满足第一可数性公理的拓扑空间中函数上(下)极限是子极限集的最大(小)元。针对在某点存在单调递减的可数邻域基的函数,得到了上(下)极限的等价条件和几个性质。

关键词:拓扑空间; 上(下)极限; 第一可数

中图分类号: O189.11

文献标识码: A

上世纪末到本世纪初,许多学者讨论了上(下)极限各种定义的等价性和上(下)极限的性质^[1-4],但都没有超出实直线的范围。那么,在比实直线范围更广的拓扑空间上,如何定义上(下)极限,上(下)极限又有何性质,本文首先将上(下)极限的定义推广到了一般拓扑空间,定义方式与文献[5]类似。然后指出拓扑空间中函数的上(下)极限可以看作函数的子极限集合的上(下)确界。最后讨论了满足第一可数性公理的拓扑空间中函数上(下)极限的性质,以及在某点存在单调递减的可数邻域基的函数的上(下)极限的等价条件。

本文用 $\mu(x)$ 表示点 $x \in X$ 的邻域系, \mathbb{N} 和 \mathbb{R} 分别表示自然数集和实数集。若 $E \subset X$, E' 表示 E 的导集。拓扑空间中的有关概念和基本性质见文献[6-8]。

定义 1^[8]称拓扑空间 X 是第一可数的(或称 X 为 A_1 空间)如果对于 $\forall x \in X$,点 x 有一个至多可数的邻域基。

定义 2设 X 是一个拓扑空间, $E \subset X$, $f(x)$ 在 E 上有定义, $x_0 \in E'$,称实数 A 为 $f(x)$ 在 x_0 的子极限,如果 $\exists x_n \in E \setminus \{x_0\}$ 使得当 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 时,有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 。

定义 3设 $A \in [-\infty, +\infty]$,如果 A 为 $f(x)$ 在 x_0 处所有子极限的上确界,则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 点的上极限,记为: $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$;类似地,如果 B 为 $f(x)$ 在 x_0 处所有

子极限的下确界,则称 B 为 $f(x)$ 在 x_0 点的下极限,记为 $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 。

记 $Z(x_0) = \{ \alpha | \alpha \text{ 为 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处的子极限} \}$ 则

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup Z(x_0)$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf Z(x_0)$$

引理 1^[8]设拓扑空间 X 为 A_1 空间, $\forall x \in X$,则 X 中必存在 x 的一个单调递减的可数邻域基 $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$,即, $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} \subset V_n$ 。

将实直线上函数上(下)极限的一些性质推广到满足第一可数性公理的拓扑空间上。

定理 1设 X 是满足第一可数性公理的拓扑空间, $E \subset X$ 并且 $x_0 \in E'$,则对于任何 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$,必有

$$(1) \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup Z(x_0) \in Z(x_0)$$

$$(2) \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf Z(x_0) \in Z(x_0)$$

即, $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 和 $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 分别为 $Z(x_0)$ 中的最大元与最小元。

证明记 $H = \sup Z(x_0)$,并且取点 x_0 的单调递减可数邻域基 $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$,对于 $\forall n \in \mathbb{N}$,取 $\varepsilon_n = 1/n > 0$,则 $\exists \alpha_n \in Z(x_0)$ 使得 $H - \varepsilon_n < \alpha_n \leq H + \varepsilon_n$ 。因为 $\alpha_n \in Z(x_0)$,故对于 $\forall k \in \mathbb{N}$,必然有 $x_k^{(n)} \in E \cap V_k \setminus \{x_0\}$,

则 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = x_0$ 。由于 α_n 是 $f(x)$ 在 x_0 处的子极限, 进而 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k^{(n)}) = \alpha_n$, 即对于 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k(n) \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall k > k(n)$ 有 $H - \varepsilon_n < f(x_k^{(n)}) < H + \varepsilon_n$ 并且 $x_k^{(n)} \in V_k$ 。特别地, 对于 $n = 1, \exists k_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $x_{k_1}^{(1)} \in V_1$ 并且 $f(x_{k_1}^{(1)}) \in (\alpha_1 - \varepsilon_1, \alpha_1 + \varepsilon_1)$, 从而 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(1)} = x_0$ 并且 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k^{(1)}) = \alpha_1$, 对于 $n = 2, \exists k_2 > k_1$, 有 $x_{k_2}^{(2)} \in V_2$ 并且 $f(x_{k_2}^{(2)}) \in (\alpha_2 - \varepsilon_2, \alpha_2 + \varepsilon_2)$, 如此继续进行下去, 得到点列 $x_{k_n}^{(n)} \in E$ 且 $x_{k_n}^{(n)} \in V_n, f(x_{k_n}^{(n)}) \in (H - \varepsilon_n, H + \varepsilon_n)$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k_n}^{(n)} = x_0, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{k_n}^{(n)}) = H \in Z(x_0)$, 故 (1) 真。同理可证 (2) 真。

由此, 有如下结果:

定理 2 设 X 是满足第一可数性公理的拓扑空间, $E \subset X, x_0 \in E'$ 并且点 x_0 有单调递减的可数邻域基 $\{V_k\}_{k=1}^\infty$, 若 $f(x)$ 在 E 上有定义并且 A 为有限数, 则下列三个命题等价:

(1) $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

(2) $f(x)$ 在 x_0 附近同时满足:

① $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall x \in V_k, \text{有 } f(x) < A + \varepsilon$ 。

② $\forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists x \in V_k, \text{有 } f(x) > A - \varepsilon$ 。

(3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in E \cap V_k} f(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{x \in E \cap V_k} f(x) = A$

证明 按 (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1) 进行循环证明。

(1) \Rightarrow (2) 由定理 1 知, $A \in Z(x_0)$, 则 $\exists \{x_n\} \subset E \setminus \{x_0\}$ 使得 $x_n \rightarrow x_0$, 并且 $f(x_n) \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$, 可知 ② 成立。

对于 ①, 用反证法。假设 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists x \in V_k, \text{有 } f(x) \geq A + \varepsilon_0$ 。对 $k_1 \in \mathbb{N}, \exists x_1 \in V_{k_1}, \text{有 } f(x_1) \geq A + \varepsilon_0$, 取 $k_{i+1} \geq k_i + i$ 使得 $x_i \notin V_{k_{i+1}}$, 则 $x_1, \dots, x_{i-1} \notin V_{k_{i+1}}, \exists x_{i+1} \in V_{k_{i+1}}, \text{有 } f(x_{i+1}) \geq A + \varepsilon_0$ 。如此得到一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, 由于 $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 x_0 附近有界, 即 $f(x_n)$ 有界, 则 $\exists x_{n_i} \in E (x_{n_i} \neq x_0)$ 使得 $x_{n_i} \rightarrow x_0$, 且 $f(x_{n_i})$ 是收敛的, 于是得到 $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \inf_{x \in E \cap V_k} f(x) \geq A + \varepsilon_0$, 这与 $\sup Z(x_0) = A$ 矛盾。

(2) \Rightarrow (3)。由 ① 知: $\forall \varepsilon > 0, \exists k(\varepsilon) > 0, \forall x \in E \cap V_{k(\varepsilon)} \text{有 } f(x) < A + \frac{\varepsilon}{2}$, 故:

$$\sup_{x \in E \cap V_{k(\varepsilon)}} f(x) \leq A + \frac{\varepsilon}{2} < A + \varepsilon$$

而对于 $\forall k > k(\varepsilon)$, 有

$$\sup_{x \in E \cap V_k} f(x) \leq \sup_{x \in E \cap V_{k(\varepsilon)}} f(x) < A + \varepsilon$$

因此, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in E \cap V_k} f(x) = A$ 。

证 $\inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{x \in E \cap V_k} f(x) = A$, 即证明 $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}$ 使得 $A \leq \sup_{x \in E \cap V_k} f(x) < A + \varepsilon$ 。事实上, $\exists x_n \in E (x_n \neq x_0)$,

使得当 $x_n \rightarrow x_0$ 时 $f(x_n) \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$, 即 $A \leq$

$$\sup_{x \in E \cap V_k} f(x)$$
。因此, $\inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{x \in E \cap V_k} f(x) = A$ 。

(3) \Rightarrow (1) 若 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in E \cap V_k} f(x) = A$, 则 $\forall \varepsilon_n > 0 (\varepsilon_n = \frac{1}{n})$, $\exists k_n \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall k \geq k_n$ 时, 有

$$|\sup_{x \in E \cap V_k} f(x) - A| < \varepsilon_n$$

特别地, 有 $A - \varepsilon_n < \sup_{x \in E \cap V_{k_n}} f(x) < A + \varepsilon_n$, 可取 $x_n \in E \cap V_{k_n}$ 使得 $|f(x_n) - A| < \varepsilon_n$, 因此, 存在 $\{x_n\} \subset E$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 并且 $f(x_n) \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$, 故 A 为 $f(x)$ 在 x_0 的子极限, 即 $A \in Z(x_0)$ 。

证明 A 为 $Z(x_0)$ 中的最大元。

事实上, 对于 $\forall B > A$, 则有自然数 n 使得 $A + \frac{1}{n} < B$, 而由 $A = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{x \in E \cap V_k} f(x)$ 知: $\exists k(n) \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sup_{x \in E \cap V_{k(n)}} f(x) < A + \frac{1}{n} < B$$

因此, 对于 $\forall x \in E \cap V_{k(n)}$, 有 $f(x) < A + \frac{1}{n} < B$,

即 B 不可能为 $f(x)$ 在点 x_0 的子极限, 因此 A 为 $Z(x_0)$ 中的最大元。

在定理 2 中, 如果定义 $W_f^*(x_0, k) = \sup_{x \in E \cap V_k} f(x)$ 不难看出, 数列 $\{W_f^*(x_0, k)\}_{k=1}^\infty$ 关于 k 单调递减的。

类似于定理 2, 关于下极限有如下结论:

推论 1 设 X 是一个拓扑空间, $E \subset X, x_0 \in E'$ 并且点 x_0 有单调递减的可数邻域基 $\{V_k\}_{k=1}^\infty$ 。若 $f(x)$ 在 E 上有定义并且 B 为有限数, 则下列三个命题等价:

(1) $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$

(2) $f(x)$ 在 x_0 附近同时满足:

① $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall x \in V_k, \text{有 } f(x) > B - \varepsilon$ 。

② $\forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \exists x \in V_k, \text{有 } f(x) < B + \varepsilon$ 。

(3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{x \in E \cap V_k} f(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{x \in E \cap V_k} f(x) = B$

同样, 如果定义 $V_f^*(x_0, k) = \inf_{x \in E \cap V_k} f(x)$, 不难得知:

数列 $\{V_f^*(x_0, k)\}_{k=1}^\infty$ 关于 k 单调递增。

推论 2 设 X 是一个拓扑空间, $E \subset X, x_0 \in E'$ 并且点 x_0 有单调递减的可数邻域基 $\{V_k\}_{k=1}^\infty$, 则下面几条成立:

(1) $f(x)$ 在 x_0 附近有界, 则 $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x), \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 必有限。

(2) $B = \underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

(3) $\forall a \in Z(x_0)$, 恒有: $B \leq a \leq A$ 。

(4) $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}, \forall x \in E \cap V_k \text{有 } A + \varepsilon > f(x) > B - \varepsilon$ 。

(5) $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 当且仅当 $\overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)} = A$ 。

下面给出拓扑空间中函数上下极限的另外两条性质。

定理3 (保序性) 设 X 是一个拓扑空间, $E \subset X$, $x_0 \in E'$ 并且点 x_0 有单调递减的可数邻域基 $\{V_k\}_{k=1}^\infty$, 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 E 上有定义 并且 $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall x \in E \cap V_k$ 恒有 $f(x) \leq g(x)$, 则下列不等式同时成立:

(1) $\overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)} \leq \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)}$

(2) $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)$

证明 因为 $\forall x \in E \cap V_{k_0}$, 恒有 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\forall k \geq k_0$, 有

$W_f^*(x_0, k) = \sup_{x \in E \cap V_k} f(x) \leq \sup_{x \in E \cap V_k} g(x) = W_g^*(x_0, k)$

故

$\overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in E \cap V_k} f(x) \leq$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in E \cap V_k} g(x) = \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)}$

从而 (1) 真。

同理 因为 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\forall k \geq k_0$, 也有

$V_f^*(x_0, k) = \inf_{x \in E \cap V_k} f(x) \leq \inf_{x \in E \cap V_k} g(x) = V_g^*(x_0, k)$

于是

$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{x \in E \cap V_k} f(x) \leq$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{x \in E \cap V_k} g(x) = \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)$

从而 (2) 真。

定理4 设 X 是一个拓扑空间, $E \subset X$, $x_0 \in E'$, 并且点 x_0 有单调递减的可数邻域基 $\{V_k\}_{k=1}^\infty$, 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 E 上有定义且有界 则:

(1) $\overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)} + \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)} \leq \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))}$

(2) $\max\{\overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)} + \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)} + \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)}\}$

$\leq \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x)} + \overline{\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)}$

证明 (1) 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 E 上均有界 故对于 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_n \in E \cap V_n$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 得到 $\inf f(x) + \inf g(x) \leq f(x) + g(x)$, 从而

$\inf f(x) + \inf g(x) \leq \inf (f(x) + g(x))$

将 x 换成 x_n 然后使 $n \rightarrow \infty$, 便得到要证明的不等式。类似地 (2) 也成立。

参考文献:

[1] 沈波. 数列与相应函数列的上、下极限间关系探讨[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2005, 22(4): 100-102.
[2] 杨辉, 宛金龙. 数列上、下极限的注记[J]. 安庆师范学院学报:自然科学版, 2004, 10(3): 72-73.
[3] 孟凡友, 金俊, 王冰. 关于集列上、下极限的进一步研究[J]. 牡丹江师范学院学报:自然科学版, 2002(4): 9-10.
[4] 黄世团. 关于上(下)极限几种定义的等价性[J]. 桂林市教育学院学报:综合版, 1997, 31(1): 70-72.
[5] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
[6] 卢天秀, 朱培勇. 线性序拓扑空间上不稳定流形的映射性质[J]. 四川理工学院学报:自然科学版, 2009, 22(4): 32-34.
[7] 汤磊, 胡珍华, 吴中华. 弱准连续与弱 ∂ 连续函数的分解[J]. 四川理工学院学报:自然科学版, 2009, 22(2): 13-15.
[8] 朱培勇, 雷银彬. 拓扑学导论[M]. 北京: 科学出版社, 2009.

Some Properties of Upper and Lower Limits of a Function on Topological Space

LU Tian-xiu, ZHU Pei-yong, XIN Bang-ying

(1. School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China;

2. School of Mathematical Science, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China;

3. School of Automotive and Electronic Engineering, Xichang College, Xichang 615013, China)

Abstract: Combined with properties of topological space, this paper discussed the upper and lower limits of a function, obtained some results which relatively similar to the ones on real line. First, the concept of upper and lower limits of a function in topological space is defined. Then it is proved that upper and lower limits of a function on first-countable topological space is the largest(smallest) element of sub-limit set. Also, the equivalent conditions and some properties of the function with monotone decreasing countable neighborhood basis at a point are obtained.

Key words: topological space; upper and lower limits; first-countable