

基 - 可数亚紧空间

唐永帅¹, 高绍娟¹, 康素玲²

(1. 成都理工大学应用数学系, 成都 610059; 2. 合肥学院数学与物理系, 合肥 230601)

摘 要:文章引入了基 - 可数亚紧空间, 获得了如下主要结果: (1) $\{F_i\}_{i \in N}$ 是空间 X 的点有限闭覆盖, 每一闭集 $F_i (i \in N)$ 是相对于 X 的基 - 可数亚紧闭子空间, 则 X 是基 - 可数亚紧空间。 (2) 设 $f: X \rightarrow Y$ 是基 - 可数亚紧映射, $\omega(X) \geq \omega(Y)$, 如果 Y 是正则的基 - 可数亚紧空间, 那么 X 是基 - 可数亚紧空间。

关键词:基; 点有限; 基 - 可数亚紧空间; 基 - 可数亚紧映射

中图分类号: O189.11

文献标识码: A

引 言

Proter J. E 在文献[1]中定义了基 - 仿紧空间, 并研究了基 - 仿紧空间的性质。本文在基 - 仿紧空间基础上给出了基 - 可数亚紧空间的定义, 并对基 - 可数亚紧空间的有关性质进行了初步的探讨。文中用 N 表示自然数集, $|A|$ 表示集合 A 的势, $\omega(X)$ 表示空间 X 基底的最小势, 简称为拓扑势。 $(U)_A$ 和 $N(A)$ 分别表示集合 $\{U \in U: U \cap A \neq \emptyset\}$ 和集合 A 的开邻域; 特别 $(U)_x$ 和 $N(x)$ 分别表示集合 $(U)_{\{x\}}$ 和 $N(\{x\})$ 的开邻域。 $St(A, U) = \cup (U)_A, St(x, U) = \cup (U)_{\{x\}}$ 。文中所有映射均为连续满射, 用 f 表示。其它未作特殊声明的拓扑学术语见文献[2,3]。

定义 1 空间 X 的集族 U 称为局部有限的, 如果对任意 $x \in X$, 存在 x 的邻域 O_x 至多与 U 中有限个元相交。或者, $\forall x \in X, \exists O_x \in N(x), \text{有 } |(U)_{O_x}| < \omega$ 。

定义 2 空间 X 的集族 U 称为点有限的, $\forall x \in X$, 有 $|(U)_x| = |(U)_{\{x\}}| < \omega$ 。

定义 3 空间 X 的基底的最小势, 称为拓扑势, 记为 $\omega(X)$ 。

定义 4 集族 V 和 U 都是集合 X 的覆盖, 如果对

$\forall V \in V, \exists U \in U$, 使得 $V \subset U$ 成立, 称集族 V 是 U 的部分加细; 如果还满足 $\cup V = \cup U$, 则称 V 是 U 的加细。

定义 5 空间 X 称为基 - 仿紧空间, 如果存在 X 的一个基 B , 有 $|B| = \omega(X)$, 对于 X 的每一开覆盖 U , 都存在 $B' \subset B$, 使得 B' 是 U 的局部有限的开加细。

定义 6 空间 X 称为基 - 亚紧空间, 如果存在 X 的一个基 B , 有 $|B| = \omega(X)$, 使得对于 X 的每一开覆盖 U , 都存在 $B' \subset B$, 使得 B' 是 U 的点有限的开加细。

定义 7 空间 X 称为基 - 可数亚紧空间, 如果存在 X 的一个基 B , 有 $|B| = \omega(X)$, 使得对于 X 的每一可数开覆盖 U , 都存在 $B' \subset B$, 使得 B' 是 U 的点有限的开加细。

定义 8 空间 X 的子集 M 称为相对于 X 是基 - 可数亚紧的, 如果存在 X 的一个基 B , 有 $|B| = \omega(X)$, 使得对于 M 在 X 中的每一可数开覆盖 U (即 X 中的开集族覆盖 M), 都存在 $B' \subset B$, 使得 B' 是 U 的点有限的部分开加细并且 $M \subset \cup B'$ 。

定义 9 称映射 $f: X \rightarrow Y$ 为基 - 可数亚紧映射, 如果存在 X 的基 B , 满足 $|B| = \omega(X)$, 并且对于任意的 $y \in Y$ 以及 $f^{-1}(y)$ 在 X 中的任意可数开覆盖 U , 都存在 y

收稿日期: 2011-04-12

基金项目: 安徽省高等学校省级优秀青年人才基金资助项目(2010SQRL158)

作者简介: 唐永帅(1982-), 男, 四川眉山人, 硕士生, 主要从事拓扑学方面的研究。

的开邻域 O_y 和 \cup 的部分加细 $B_y \subset B$, 使得 $f^{-1}(O_y) \subset \cup B_y$, 并且 B_y 在 $f^{-1}(O_y)$ 处点有限。

引理 1 基-可数亚紧空间 X 的闭子集 M 相对于 X 是基-可数亚紧的。

证明 设 X 是基-可数亚紧空间, M 是 X 的闭子集, B 是 X 的基, 有 $|B| = \omega(X)$, 令 \cup 是 M 在 X 中的任一可数开覆盖, 则 $\cup \cup \{X \setminus M\}$ 是 X 的可数开覆盖, 由 X 是基-可数亚紧空间, 所以存在 $B' \subset B$, 使得 B' 是开覆盖 $\cup \cup \{X \setminus M\}$ 在 X 中的点有限加细, 则 $W = \{B \in B' : B \cap M \neq \emptyset\}$ 是 \cup 的点有限的部分开加细, 并且 $M \subset \cup W$ 。

1 主要结论和证明

定理 1 设 X 是基-可数亚紧空间, M 是 X 的闭子集, 并且满足 $\omega(X) = \omega(M)$ 则 M 是基-可数亚紧空间。

证明 由引理 1 知 X 的闭子集 M 相对于 X 是基-可数亚紧的, 因为 $M \subset X$, M 是 X 的闭集, 并且满足 $\omega(X) = \omega(M)$, 所以 M 是基-可数亚紧空间。

定理 2 设 $\{F_i\}_{i \in N}$ 是空间 X 的点有限闭覆盖, 每一闭集 $F_i (i \in N)$ 是相对于 X 的基-可数亚紧闭子空间, 则 X 是基-可数亚紧空间。

证明 设 $X = \cup_{i \in N} F_i$, 其中每个 F_i 都是相对于 X 的基-可数亚紧的闭子空间。对 $\forall i \in N, \exists X$ 的基 B_i , 满足 F_i 都是相对于 X 是基-可数亚紧的。令 $B = \cup_{i \in N} B_i$, 则 B 是 X 的基, 并且满足 $|B| = \omega(X)$ 。 B 是使得对每个 $i \in N, F_i$ 相对于 X 是基-可数亚紧的基。设 $\cup = \{U_i\}_{i \in N}$ 是 X 的任一可数开覆盖, 对 $\forall x \in X$, 取 $O_{i(x)} \subset U_i$, 使得 $x \in O_{i(x)}$, 即 $\{x\} \subset O_{i(x)}, i(x) = i, U_i \in \cup$ 。因 $\{F_i\}_{i \in N}$ 是点有限, 不妨设 $x \in O_{i(x)}$, 有 $|(F_i)_x| = |(F_i)_{\{x\}}| < \omega$ 。令 $V = \{O_{i(x)} : x \in X, i(x) = i\}_{i \in N}$, 则 V 是 X 可数开覆盖且加细 \cup 。对每个 $i \in N$, 由于 F_i 相对于 X 的基 B 是基-可数亚紧的, 则存在 $B'_i \subset B$, 使得 B'_i 在 X 中是点有限的部分开加细 \cup 并且满足 $F_i \subset \cup B'_i$ 。令 $B' = \cup_{i \in N} B'_i \subset B$, 下证 B' 是 X 的点有限族且加细 \cup 。事实上, 对 $\forall i > n, (n \in N)$ 有 $O_{n(x)} \cap B'_i = \emptyset (O_{n(x)} \in V)$ 。否则, 存在某一个 i , 使得 $O_{n(x)} \cap B'_i \neq \emptyset$, 又因为 $F_i \subset \cup B'_i$, 所以 $O_{n(x)} \cap F_i \neq \emptyset$, 这与 $\{F_i\}_{i \in N}$ 是点有限的相矛盾。因此, B' 是 X 的点有限族。

又 $X = \cup_{i \in N} F_i \subset \cup_{i \in N} B'_i$, 即 $B' = \cup_{i \in N} B'_i$ 加细 \cup 。

定理 3 空间 X 是基-可数亚紧的当且仅当存在 X 的一个开基 B , 有 $|B| = \omega(X)$, 对于 X 的每个可数开覆盖 $\cup = \{U_i\}_{i \in N}$, 都存在 $B' \subset B$, 使得 $B' = \{B_i\}_{i \in N}$ 是 \cup 的点有限的开加细, 并且满足 $B_i \subset U_i$ 。

证明 (\Rightarrow) 假设 $\cup = \{U_i\}_{i \in N}$ 是基-可数亚紧空间 X 的可数开覆盖, 则存在一开基 B , 有 $|B| = \omega(X)$, 使得 $B' \subset B$ 是 \cup 的点有限的开加细。令 $B' = \{B\}$, 对每一个 $B \in B'$, 满足 $B \subset U_i$ 。构造 $B_i = \cup \{B : B \in B' \}$, 则 $\{B_i\}_{i \in N}$ 是点有限的。否则, 设 $\forall x \in X, \exists O_x$ 与 $\{B_i\}_{i \in N}$ 中的可数无限个 B_1, B_2, \dots 相交。由 $B_i = \cup \{B : B \in B' \}$, 则存在无限多个 $B \in B_i$ 与 O_x 中的 x 相交, 这与 $B' = \{B\}$ 是点有限的集族相矛盾。所以 $\{B_i\}_{i \in N}$ 是点有限的。显然 $\{B_i\}_{i \in N}$ 加细 \cup , 并且满足 $B_i \subset U_i$ 。 (\Leftarrow) 因为 $B' \subset B, B' = \{B_i\}_{i \in N}$ 是 \cup 的点有限的可数开加细, 所以 X 是基-可数亚紧空间。

定理 4 设 $f: X \rightarrow Y$ 是基-可数亚紧映射, $\omega(X) \geq \omega(Y)$, 如果 Y 是正则的基-可数亚紧空间, 那么 X 是基-可数亚紧空间。

证明 设 B_Y 是 Y 的满足基-可数亚紧的基, B_X 是 X 的对于 f 满足基-可数亚紧的基, 令 $B = B_X \cap f^{-1}(B_Y)$, 则 B 为 X 的基。由 $\omega(X) \geq \omega(Y)$ 得到 $|B| = |B_X| = \omega(X)$ 。下面证明 B 是 X 的满足基-可数亚紧的基。设 \cup 是 X 的可数开覆盖。因为 B_X 是 X 的对于 f 满足基-可数亚紧的基, 所以对任意的 $y \in Y$ 以。存在 y 的开邻域 O_y 和 \cup 的部分加细 $B_y \subset B_X$, 满足 $f^{-1}(O_y) \subset \cup B_y$, 并且 B_y 在 X 中的 $f^{-1}(O_y)$ 处点有限。因为 Y 是正则空间, 那么存在 y 的开邻域 V_y , 满足 $y \in V_y \subset \bar{V}_y \subset O_y$, 从而有 $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V_y) \subset f^{-1}(\bar{V}_y) \subset f^{-1}(O_y) \subset \cup B_y$ 。记 $V^* = \{V_y : y \in Y\}$, 则 V^* 覆盖 Y 。由于 Y 是基-可数亚紧空间, 不妨设 V^* 是可数的开覆盖, 则存在一个 $B'_y \subset B_y$ 是 V^* 点有限的开加细, 令 $B'_y = \{B'_s : s \in N\}$ 。对任意 $s \in N$, 选取一个 $y_s \in Y$, 使得 $B'_s \subset V_{y_s}$ 。构造集族 $B' = \cup \{B_{y_s} \cap f^{-1}(B'_s) : B_{y_s} \in B_{y_s}, B'_s \in B'_y, s \in N\}$, 则 $B' \subset B$ 并且 B' 开加细 \cup 。下面证明 B' 是点有限的。事实上, $f^{-1}(B'_y)$ 在 X 中是点有限的。若不然, 假设存在 $x_0 \in X$ 包含在 $f^{-1}(B'_y)$ 的无限多个元中, 不妨设这无限多个元为可数无限个, 即 $x_0 \in f^{-1}(B'_i), B'_i \in B'_y, i \in N$ 则有 $y = f(x_0) =$

$f(f^{-1}(B'_i)) = B'_i, i \in N$, 这与 B'_Y 在 Y 中是点有限的相矛盾。对 $x \in X$, 存在有限集 $N_x \subset N$, 使得 $x \in f^{-1}(B'_s), B'_s \in B'_Y, s \in N_x$, 对任意 $s \in N_x$, 由 $B'_s \subset V_{y_s} \subset \bar{V}_{y_s} \subset O_{y_s}$, 可得到 $x \in f^{-1}(B'_s) \subset f^{-1}(O_{y_s}) \subset \cup B_{y_s}$, 因为 B_{y_s} 在 X 中集合 $f^{-1}(O_{y_s})$ 处是点有限的, 所以 x 含于 B_{y_s} 的有限多个元中, 即 B' 是点有限的。

参 考 文 献:

- [1] Porter J E. Base-paracompact spaces[J]. Topology and Its Applications, 2003, 128: 145-156.
 [2] Engelking R. General Topology[M]. Berlin: Heldermann,

1989.

- [3] 高国士. 拓扑空间论[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
 [4] 蒋继光. 一般拓扑学专题选讲[M]. 成都: 四川教育出版社, 1995.
 [5] Chen Hai-yan, Zhang Xia-wei, Koung Qing-zhao, et al. Other covering properties on maps[J]. Journal of Guangxi University, 2006, 31(3): 190-193, 207.
 [6] Grabner E, Grabner G. Nearly Metacompact Spaces[J]. Topology and Its Appliation, 1999, 98: 191-201.
 [7] Matveev M. Absolutely countably compact spaces[J]. Topology and Its Appliation, 1994, 58: 81-92.

Base-Countably Metacompact Spaces

TANG Yong-shuai¹, GAO Shao-juan¹, KANG Su-ling²

(1. Department of Applied Mathematics, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China;

2. Department of Mathematics and Physics, Hefei University, Hefei 230601, China)

Abstract: The notion of base-countably metacompact space is introduced and the following results are mainly proved:

(i) If $\{F_i\}_{i \in N}$ is a point finite closed cover of X , and each $F_i (i \in N)$ is a closed base-countably metacompact subspace relative to X , then X is a base-countably metacompact space. (ii) Let Y be a base-countably space and $f: X \rightarrow Y$ be a base-countably metacompact mapping and $\omega(X) \geq \omega(Y)$, if Y is regular then X is base-countably metacompact.

Key words: base; point finite; base-countably metacompact spaces; base-countably metacompact mapping