

一类弱散射浅水波方程局部解的存在唯一性

王 英

(四川理工学院理学院, 四川 自贡 643000)

摘 要:研究了一类含弱散射项的非线性浅水波方程(包括弱散射的 Camassa - Holm 方程和弱散射的 Degasperis - Procesi 方程)解的局部适定性,即在空间 $H^s(R)$ ($s > \frac{3}{2}$) 中,使用 Kato 定理,建立了该方程局部解的存在唯一性。

关键词:浅水波方程;弱散射项;存在性;唯一性

中图分类号:0175.2

文献标识码:A

引 言

近年来, Camassa - Holm (C - H) 方程和 Degasperis - Procesi (D - P) 方程的 Cauchy 问题引起了许多学者的兴趣,大量有关它们解的性态的工作被推出,这不仅包括解的局部适定性、模拟持续特性的整体强解和模拟断裂波的爆破解,而且还包括解的轨道稳定性和在分布意义下的整体弱解的存在唯一性等(见文献[1-8])。

为了研究弱散射项对 C - H 方程的影响, Wu 和 Yin (见文献[10-11])研究了下面的弱散射 C - H 方程

$$u_t - u_{xxt} + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} + \lambda(u - u_{xx}) = 0 \quad (1)$$

其中 $\lambda > 0$ 是任意正常数,在适当的条件下,得到了方程(1)解的一些动力性质,并与 C - H 方程解的动力性质做了深入的比较(见文献[10-11])。

与 C - H 方程一样,为了探讨弱散射项对 D - P 方程的影响, Wu 和 Yin (见[12]), Guo (见[9])分别研究了弱散射 D - P 方程

$$u_t - u_{xxt} + 4uu_x - 3u_x u_{xx} - uu_{xxx} + \lambda(u - u_{xx}) = 0 \quad (2)$$

解的性质,得到了许多与 D - P 方程解的性态不一样的性质(见文献[9,12])。

基于 C - H 方程和 D - P 方程中项 $uu_x, u_x u_{xx}$ 和 uu_{xxx} 之间的系数关系在他们解的动力学性质中扮有重要的角色。在本文中,我们将考虑下面方程

$$u_t - u_{xxt} + (a + b)uu_x - au_x u_{xx} - buu_{xxx} + \lambda(u - u_{xx}) = 0 \quad (3)$$

局部解的存在唯一性,其中 $a > 0, b > 0$ 和 $\lambda > 0$ 是任意常数, u 是沿 x 方向的流速, $\lambda(u - u_{xx})$ 表示弱散射项。当 $a = 2, b = 1$ 时,方程(3)变成方程(1)。当 $a = 3, b = 1$ 时,方程(3)变成方程(2)。作为方程(1)和方程(2)的推广,由于方程(3)中的系数 a, b 是任意常数,方程(3)失去了方程(1)和方程(2)拥有的许多性质。在本文中,我们将使用 Kato 定理(见文献[13]),在初值 $u_0 \in H^s, s > \frac{3}{2}$ 的条件下,建立了方程(3)解的局部适定性。

本章使用如下记号: C_0^k 表示所有在 $[0, +\infty) \times R$ 上具有紧支集的 k 阶连续可微函数 $\varphi(t, x)$ 构成的空间, $H^s = H^s(R)$ 表示 Soblev 空间,具有如下范数的 $\|h\|_H = \left(\int_R (1 + |\xi|^2)^s | \hat{h}(t, \xi) |^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$, 这里 $\hat{h}(t, \xi) = \int_R e^{-i\xi x} h(t, x) dx$ 并令 $\Lambda = (1 - \partial_x^2)^{\frac{1}{2}}$ 。

使用上边的注释,方程(3)的 Cauchy 问题可以重写为

$$\begin{cases} u_t + buu_x + a\Lambda^{-2}(uu_x) + \frac{3b-a}{2}\Lambda^{-2}\partial_x(u_x) + \lambda u = 0, x \in R \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (4)$$

收稿日期:2011-04-16

基金项目:四川理工学院理学院自然科学基金资助项目(09LXYB03)

作者简介:王 英(1978-),女,四川资阳人,讲师,硕士,主要从事偏微分方面的研究。

1 局部适定性

我们给出描述问题(4)解的局部适定性结论。

定理 1.1 若 $u_0 \in H^s, s > \frac{3}{2}$, 那么问题(4)有唯一解 u , 使得 $u = u(\cdot, u_0) \in C([0, T]; H^s(R)) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(R))$

这里 $T = T(u_0) > 0$ 。此外, 解连续的依赖于初值 u_0 , 即映射 $u_0 \rightarrow u(\cdot, u_0), H^s(R) \rightarrow C([0, T]; H^s(R)) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(R))$ 是连续的。

为了证明定理 1.1, 我们需要下面的预备知识。考虑拟线性发展方程

$$\frac{dv}{dt} + A(v)v = f(v), t \geq 0, v(0) = v_0, \quad (5)$$

让 X 和 Y 是 Hilbert 空间, 使得 Y 嵌入 X 是连续和稠密的。假设 $Q: Y \rightarrow X$ 是拓扑同构的, 令 $L(X, Y)$ 是从 Y 到 X 的有界线性算子空间, 如果 $X = Y$, 我们记这个空间为 $L(X)$ 。我们陈述下面的条件, 其中 ρ_1, ρ_2, ρ_3 和 ρ_4 是依赖于 $\max\{\|y\|_Y, \|z\|_Y\}$ 的常数。

(I) 对 $y \in X, A(y) \in L(X, Y)$ 满足 $\|(A(y) - A(z))w\|_X \leq \rho_1 \|y - z\|_X \|w\|_Y, y, z, w \in Y$ 且 $A(y) \in G(X, 1, \beta)$ (即 $A(y)$ 是拟 $-m$ -增长的), 在 Y 上是一致有界的。

(II) $QA(y)Q^{-1} = A(y) + B(y)$ 在 Y 上是一致有界的, 其中 $B(y) \in L(X)$ 是有界的并满足 $\|(B(y) - B(z))w\|_X \leq \rho_2 \|y - z\|_X \|w\|_X, y, z \in Y, w \in X$ 。

(III) $f: Y \rightarrow Y$ 扩展成一个从 X 到 X 的映射, 在 Y 上有界, 并且满足 $\|f(y) - f(z)\|_Y \leq \rho_3 \|y - z\|_Y, y, z \in Y, \|f(y) - f(z)\|_X \leq \rho_4 \|y - z\|_X, y, z \in Y$ 。

Kato 定理 (见文献[19]) 假设 (I), (II) 和 (III) 成立。若 $v_0 \in Y$, 那么问题(5)存在唯一解 v , 使得 $v = v(\cdot, v_0) \in C([0, T]; Y) \cap C^1([0, T]; X)$, 其中 $T > 0$ 是最大时间, 只依赖于范数 $\|v_0\|_Y$ 。此外, 映射 $v_0 \rightarrow v(\cdot, v_0)$ 是一个从 Y 到空间 $C([0, T]; Y) \cap C^1([0, T]; X)$ 的连续映射。

我们设 $A(u) = bu\partial_x, Y = H^s(R), X = H^{s-1}(R), \Lambda = (1 - \partial_x^2)^{\frac{1}{2}}, f(u) = -a\Lambda^{-2}(uu_x) - \frac{3b-a}{2}\Lambda^{-2}\partial_x(u_x) - \lambda u$ 和 $Q = \Lambda$ 。为了证明定理 1.1, 我们只需检验 $A(u)$ 和 $f(u)$ 满足假设(I), (II) 和 (III)。

引理 1.1 (见 [6]) 算子 $A(u) = bu\partial_x$ 属于 $G(H^{s-1}, 1, \beta)$, 其中 $u \in H^s, s > \frac{3}{2}$ 。

引理 1.2 (见[6]) 令 $A(u) = bu\partial_x$, 其中 $u \in H^s$,

$s > \frac{3}{2}$, 那么对所有的 $u \in H^s, A(u) \in L(H^s, H^{s-1})$, 此外,

$$\|(A(u) - A(z))w\|_{H^{s-1}} \leq \rho_1 \|u - z\|_{H^{s-1}} \|w\|_{H^s}, u, z, w \in H^s(R) \quad (6)$$

引理 1.3 (见[11]) 对 $s > \frac{3}{2}, u, z \in H^s$ 和 $w \in H^{s-1}$, 那么 $B(u) = [\Lambda, bu\partial_x]\Lambda^{-1} \in L(H^{s-1})$

且 $\|(B(u) - B(z))w\|_{H^{s-1}} \leq \rho_2 \|u - z\|_{H^s} \|w\|_{H^{s-1}} \quad (7)$

引理 1.4 (见[13]) r, q 是实数满足关系 $-r < q < r$, 那么则有

$$\|uv\|_{H^r} \leq c \|u\|_{H^r} \|v\|_{H^r}, r > \frac{1}{2}$$
$$\|uv\|_{H^{r+s}} \leq c \|u\|_{H^r} \|v\|_{H^r}, r < \frac{1}{2} \quad (8)$$

引理 1.5 令 $u, v \in H^s, s > \frac{3}{2}$ 和 $f(u) = -a\Lambda^{-2}(uu_x) - \frac{3b-a}{2}\Lambda^{-2}\partial_x(u_x) - \lambda uf$ 那么 f 在 H^s 上有界, 且满足 $\|f(u) - f(z)\|_{H^r} \leq \rho_3 \|u - z\|_{H^r} \quad (9)$

$$\|f(u) - f(z)\|_{H^{s-1}} \leq \rho_4 \|u - z\|_{H^{s-1}} \quad (10)$$

证明 使用空间 $H^{s_0}, s_0 > \frac{3}{2}$ 的代数特性, 我们有

$$\|f(u) - f(z)\|_{H^r} \leq \|a\Lambda^{-2}(uu_x - zz_x)\|_{H^r} + \left\| \frac{3b-a}{2}\Lambda^{-2}\partial_x(u_x - z_x) \right\|_{H^r} + \lambda \|u - z\|_{H^r} \leq c(\|\Lambda^{-2}(u^2 - z^2)\|_{H^r} + \|u_x - z_x\|_{H^{r-1}} + \|u - z\|_{H^r}) \leq c(\|u^2 - z^2\|_{H^{r-1}} + \|u_x - z_x\|_{H^{r-1}} + \|u - z\|_{H^r}) \leq c(\|(u - z)(u + z)\|_{H^{r-1}} + \|(u_x - z_x)(u_x + z_x)\|_{H^{r-1}} + \|u - z\|_{H^r}) \leq c\|u - z\|_{H^r} (\|u\|_{H^r} + \|z\|_{H^r} + 1) \leq c\rho_3 \|u - z\|_{H^r} \quad (11)$$

这便完成了(9)式的证明。

使用引理 1.4, 得

$$\|f(u) - f(z)\|_{H^{s-1}} \leq \|a\Lambda^{-2}(uu_x - zz_x)\|_{H^{s-1}} + \left\| \frac{3b-a}{2}\Lambda^{-2}\partial_x(u_x - z_x) \right\|_{H^{s-1}} + \lambda \|u - z\|_{H^{s-1}} \leq c(\|u^2 - z^2\|_{H^{s-2}} + \|u_x - z_x\|_{H^{s-2}} + \|u - z\|_{H^{s-1}}) \leq c(\|(u - z)(u + z)\|_{H^{s-2}} + \|(u_x - z_x)(u_x + z_x)\|_{H^{s-2}} + \|u - z\|_{H^{s-1}}) \leq c\|u - z\|_{H^{s-1}} (\|u\|_{H^{s-1}} + \|z\|_{H^{s-1}}) + c\|u_x - z_x\|_{H^{s-2}} (\|u_x\|_{H^{s-1}} + \|z_x\|_{H^{s-1}}) + \|u - z\|_{H^{s-1}} \leq c\|u - z\|_{H^{s-1}} (\|u\|_{H^s} + \|z\|_{H^s} + 1) \leq c\rho_4 \|u - z\|_{H^{s-1}} \quad (12)$$

(10) 式得证。

定理 1.1 的证明: 运用 Kato 定理, 引理 1.1 - 1.3 和引理 1.5, 我们得证问题 (4) 存在唯一解 $u = u(\cdot, u_0) \in C([0, T]; H^s(R)) \cap C^1([0, T]; H^{s-1}(R))$

参考文献:

- [1] Coclite G M, Karlsen K H. On the well-posedness of the Degasperis-Procesi equation[J]. *Funct. Anal.*, 2006, 223: 60-91.
- [2] Constantin A. On the scattering problem for the Camassa-Holm equation[J]. *Proc. R. Soc. Lond.*, 2001, 457: 953-970.
- [3] Lenells J. The scattering approach via the Camassa-Holm equation[J]. *nonlinear Math. Phys.*, 2002, 9: 389-393.
- [4] Degasperis A, Holm D, Hone A. A new integral equation with peakon solutions[J]. *Theoret. Math. Phys.*, 2002, 133: 1461-1472.
- [5] Xin Z, Zhang P. On the weak solutions to a shallow water equation[J]. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2000, 51: 1411-1433.
- [6] Yin Z Y. On the Cauchy problem for an integrable equation with peakon solutions[J]. *Illinois J. Math.*, 2003, 47: 649-666.
- [7] Yin Z Y. Global Weak solutions for a new periodic integrable equation with peakon solutions[J]. *Funct. Anal.*, 2004, 212: 182-194.
- [8] Escher J, Liu Y, Yin Z Y. Global weak solutions and blow-up structure for the Degasperis-Procesi equation[J]. *Funct. Anal.*, 2006, 241: 457-485.
- [9] Guo Z G. Some properties of solutions to the weakly dissipative Degasperis-Procesi equation[J]. *Differential Equations*, 2009, 246: 4332-4344.
- [10] Wu S, Yin Z. Global existence and blow-up phenomena for the weakly dissipative Camassa-Holm equation[J]. *Differential equations*, 2009, 246: 4309-4321.
- [11] Wu S, Yin Z. Blow-up, blow-up rate and decay of the solution of the weakly dissipative Camassa-Holm equations[J]. *Math Phys*, 2006, 47: 1-12.
- [12] Wu S, Yin Z. Blow-up and decay of the solution of the weakly dissipative Degasperis-Procesi equation[J]. *SIAM J. Math. Anal.*, 2008, 40(2): 475-490.
- [13] Kato T. Quasi-linear equations of evolution with applications to partial differential equations [J]. in: *Spectral Theory and Differential Equations*, in: *Lecture Notes in Math.*, vol. 448, Berlin, Springer-Verlag, 1975, 25-70.

Existence and Uniqueness of the Local Solution for a Weakly Dissipative Shallow Water Wave Equation

WANG Ying

(School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract: A weakly dissipative shallow water equation, which includes weakly dissipative Camassa-Holm equation and weakly dissipative Degasperis-Procesi equation as special cases, is investigated. Using the Kato theorem, the existence and uniqueness of its local solutions in the Sobolev space $H^s(R)$ with $s > \frac{3}{2}$ is established.

Key words: shallow water wave equation; weakly dissipative terms; existence; uniqueness