

广义逆矩阵 $A\{1\}, A\{1,3\}, A\{1,4\}$ 通式的分块表示

李莹, 杜鹃

(成都理工大学信息科学学院, 成都 610059)

摘要:在很多情况下要求给出奇异矩阵或长方矩阵的某种类型的逆矩阵。在不同的目下,它们有不同的逆矩阵,即广义逆矩阵。为了方便以后的计算,主要研究了广义逆矩阵 $A\{1\}, A\{1,3\}, A\{1,4\}$ 通式的分块表达形式并给予了证明,然后推出了广义逆矩阵 $A\{1,2,3\}$ 的分块表达及特殊情况。

关键词:广义逆矩阵;复矩阵类;矩阵维数

中图分类号:O151.21

文献标识码:A

引言

为了方便引用参考文献的公式,本文采用以下记号:

$c^{m \times n}$, $m \times n$ 复矩阵类;

$c_r^{m \times n}$, 秩为 r 的 $m \times n$ 复矩阵类;

$R(A) = \{Ax; x \in c^n\}$ 矩阵 A 的值域(列空间、像);

$N(A) = \{x; Ax=0, x \in c^n\}$, 矩阵 A 的零空间(核);

$\dim(\cdot)$, 子空间 (\cdot) 的维数。

定义 1 设 $m \times n$ 矩阵 $A \in c^{m \times n}$, 如果存在 $n \times m$ 矩阵 $G \in c^{n \times m}$ 满足 penrose 条件的一部分或全部; $AGA = A$; $GAG = A$; $(AG)^H = AG$; $(GA)^H = GA$; 则称 G 为 A 的一个广义逆矩阵。

特别的,当 G 满足上面四个等式,称 G 为 Moore - penrose 逆,记做 $A^{(1,2,3,4)}$ 或 A^+ , A^+ 存在且唯一。若 A 非奇异时, $A^+ = A^{-1}$ 。我们知道, $A^- \in A\{1\}$, $A_i^- \in A\{1,3\}$, $A_m^- \in A\{1,4\}$ 。

1 重要结论

引理 1^[1] 令 $R_1 = I + N^H N$, $R_2 = I + M^H M$ 则 $\begin{bmatrix} I \\ N \end{bmatrix} =$

$$[R_1^{-1} - R_1^{-1} N^H]$$

$$[I \ M]^+ = \begin{bmatrix} R_2^{-1} \\ M^H R_2^{-1} \end{bmatrix},$$
 当 $m - r$ 较小时, [2] 给出了

$$\begin{bmatrix} I \\ N \end{bmatrix}^+ = [I - N^H(I + NN^H)^{-1}N - N + N^H(I + NN^H)^{-1}NN^H],$$
 当 $n - r$ 较小时, [2] 中给出了 $[I \ M]^+ = \begin{bmatrix} I - M(I + M^H M)^{-1}M^H \\ M^H - M^H M(I + M^H M)^{-1}M^H \end{bmatrix}$, 其中 $M \in c^{r \times (n-r)}$, $N \in c^{(m-r) \times r}$, $G_r \in c_r^{r \times r}$ 。

引理 2^[3] 对任意给定的矩阵 $A \in c_r^{m \times n}$, 总存在着阶数分别为 m 和 n 的置换矩阵 p_1 和 p_2 以及形如 $G = \begin{bmatrix} G_r & 0 \\ o & o \end{bmatrix}$ 的非奇异矩阵 G , 使得 $Gp_1 A p_2 = \begin{bmatrix} I & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 从而有

$$A = p_1 \begin{bmatrix} I \\ -N \end{bmatrix} G_r^{-1} [I \ M] p_2 \tag{1}$$

引理 3 对任意 $A^{(1)} \in A\{1\}$, $A^{(1,2,3)} \in A\{1,2,3\}$, $A^{(1,2,4)} \in A\{1,2,4\}$, 均有

$$R(I - A^{(1)}A) = N(A) = R\left(p_2 \begin{bmatrix} -M \\ I \end{bmatrix}\right) \tag{2}$$

$$R((A^{(1,2,3)})^H) = R(A) = R\left(p_1 \begin{bmatrix} I \\ -N \end{bmatrix}\right) \tag{3}$$

$$R((I - AA^{(1)})^H) = N(A^H) = R\left(p_1 \begin{bmatrix} N^H \\ I \end{bmatrix}\right) \tag{4}$$

收稿日期:2011-05-23

基金项目:四川省教育厅自然科学重点项目资助(2008VA144)

作者简介:李莹(1985-),女,陕西西安人,硕士生,主要从事矩阵理论方面的研究。

$$R(A^{(1,2,4)}) = R(A^H) = R\left(p_2 \begin{bmatrix} I \\ M^H \end{bmatrix}\right) \quad (5)$$

证明 (2) 的证明: 从 [1] 知, 又有引理 2 知有 $R[p_2 \begin{bmatrix} -M \\ I \end{bmatrix}] \subseteq N(A)$, 再因 $\dim R(p_2 \begin{bmatrix} -M \\ I \end{bmatrix}) = n - r = \dim N(A)$, 于是有 $N(A) = R(p_2 \begin{bmatrix} -M \\ I \end{bmatrix})$

(3) 的证明: $A^{(1,2,3)''}X = (AA^{(1,2,3)'})A^{(1,2,3)''}X = AA^{(1,2,3)''}A^{(1,2,3)''}X$, 另一方面 $AX = (AA^{(1,2,3)'})X = A^{(1,2,3)''}A^HAX$, 所以 $R(A^{(1,2,3)'}) = R(A)$ 又根据引理 2 得 $R(A) \subseteq R(p_1 \begin{bmatrix} I \\ -N \end{bmatrix})$, 另一方面, 由引理 1 我们知,

$$p_1 \begin{bmatrix} I \\ -N \end{bmatrix} = p_1 \begin{bmatrix} I \\ -N \end{bmatrix} G_r^{-1} [I \quad M] p_1 p_2 \begin{bmatrix} I \\ M^H \end{bmatrix} R_2^{-1}$$

$$G_r = A p_2 \begin{bmatrix} I \\ M^H \end{bmatrix} R_2^{-1} G_r, \text{ 从而可得 } R(p_1 \begin{bmatrix} I \\ -N \end{bmatrix}) \subseteq R(A)$$

(4) 的证明: 以 A^H 代替 A 得 $R((I - AA^{(1)})^H) = N(A^H)$, 从 $A^H p_1 \begin{bmatrix} N^H \\ I \end{bmatrix} = 0$ 知

$$R(p_1 \begin{bmatrix} N^H \\ I \end{bmatrix}) \subseteq N(A^H), \text{ 又因 } \dim R(p_1 \begin{bmatrix} N^H \\ I \end{bmatrix}) = m - r =$$

$\dim N(A^H)$. 所以 $N(A^H) = R(p_1 \begin{bmatrix} N^H \\ I \end{bmatrix})$

(5) 的证明: (8) 的证明与 (6) 的证明类似。

一方面 $A^{(1,2,4)''}X = (A^H A^{(1,2,4)'})A^{(1,2,4)''}X = A^H A^{(1,2,4)''}A^{(1,2,4)' }X$, 另一方面 $A^H X = (A^H A^{(1,2,4)'})A^H X = A^{(1,2,4)''}A A^H X$, 所以 $R(A^{(1,2,4)'}) = R(A^H)$

$$\text{由引理 2 知 } R(A^H) \subseteq R(p_2 \begin{bmatrix} I \\ M^H \end{bmatrix}),$$

$$\text{又由引理 1 知, } p_2 \begin{bmatrix} I \\ M^H \end{bmatrix} = A^H p_1 \begin{bmatrix} I \\ -N \end{bmatrix} R_2 G_r^{-1},$$

$$\text{所以有 } R(p_2 \begin{bmatrix} I \\ M^H \end{bmatrix}) \subseteq R(A^H)$$

定理 1^[4] 对任意矩阵 $A \in c_r^{m \times n}$, 总存在着矩阵 $B \in c_r^{m \times r}$ 和矩阵 $C \in c_r^{r \times n}$, 使得 $A = BC$ 成立。

特别, 若 A 为行满秩或列满秩, 则 B 与 C 中有一个为单位矩阵, 定理仍成立。

定理 2^[5] 利用引理 2 知对矩阵 $[A \quad I]$ 实行一系列初等变化便有 $[A \quad I] = \begin{bmatrix} I & M & G_r & 0 \\ 0 & 0 & N & I \end{bmatrix}$ 的分块形

式。利用 $[A \quad I]$ 中的子块, 并设 $E = G_r \begin{bmatrix} I \\ -N \end{bmatrix}^+, H = [I \quad M]^+ G_r$

$$\text{则 } A^{(1,2)} = p_2 \begin{bmatrix} G_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} p_1,$$

$$A^{(1,2,3)} = p_2 \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} p_1,$$

$$A^{(1,2,4)} = p_2 [H \quad 0] p_1$$

$$A^{(1,3,4)} = p_2 \begin{bmatrix} G_r R_1^{-1} + R_2^{-1} G_r - G_r & -G_r R_1^{-1} N \\ M^H R_2^{-1} G_r & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = p_2 \begin{bmatrix} S & -SN^H \\ M^H S & -M^H SN^H \end{bmatrix} p_1, \text{ 其中 } s = R_2^{-1} G_r R_1^{-1}$$

定理 3 利用前面的引理和定理我们可以得到 A^-, A_m^-, A_i^-, A_m^- 通式的分块表

$$A^- \in A\{1\} =$$

$$\left\{ p_1 \begin{bmatrix} G_r - MZ_1 + Z_2 N + MZ_3 N & Z_2 \\ & Z_1 & Z_3 \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. p_1 : Z_1 \in c^{(n-r) \times r}, Z_2 \in c^{r \times (m-r)}, Z_3 \in c^{(n-r) \times (m \times r)} \right\} \quad (6)$$

$$A_i^- \in A\{1,3\} = \left\{ p_2 \begin{bmatrix} E - MZ \\ Z \end{bmatrix} p_1 : Z \in c^{(n-r)} \right\} \quad (7)$$

$$A_m^- \in A\{1,4\} = \left\{ p_2 [H + ZN \quad Z] p_1 : Z \in c^{n \times (m-r)} \right\} \quad (8)$$

证明 (6) 的证明: 由定理 2 知可将 $A^{(1)} = p_2 \begin{bmatrix} G_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} p_1, p_1 V p_2 = \begin{bmatrix} Z_4 & Z_2 \\ Z_1 & Z_3 \end{bmatrix}$ 和 (1) 式代入 $A\{1\} = \{A^{(1)} + V - A^{(1)} A V A A^{(1)} : V \in c^{n \times m}\}$ [7], 其中 $Z_4 \in c^{r \times r}$, 化简后得 (6)。

(7) 的证明: 为了证明 (7) 注意由定理 2 可得, $A^{(1,3)} = p_2 \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} p_1$, 由引理 3 及 (1) 式代入 $A\{1,3\} = \{A^{(1,3)} + (I - A^{(1,3)} A) Z : Z \in c^{n \times m}\}$ 经过简单计算和化简得 (7)。

(8) 的证明: 由定理 2 可得 $A\{1,4\} = p_2 [H \quad 0] p_1$, 把 (1) 式代入 $A\{1,4\} = \{A^{(1,4)} + Z(I - AA^{(1,4)}) : Z \in c^{m \times m}\}$, 应用引理 3 简单的化简, 可得 (8) 式。

2 推论

由广义逆矩阵的固定形式与一般形式的关系 $A\{1,2,3\} = \{A^{(1,2,3)} + (I - A^{(1,2,3)} A) Z A^{(1,2,3)} : Z \in c^{n \times n}\}$ [6], 利用引理 3, 我们可以得到 $A\{1,2,3\}$ 的分块表示 $A\{1,$

$2,3\} = \{A^{[1,2,3]} + p_2 \begin{bmatrix} -MZ & MZN^H \\ Z & -ZN \end{bmatrix} p_1 : Z \in c^{(n-r) \times r}\}$ 。但

是当 $n=r$ 时, 或 $r=0$ 时, $A\{1,2,3\}$ 中的 Z 不存在, 可以推出, 在这两种情况下, $A\{1,2,3\}$ 只有一个元素, 就是

A^+ 。即当 $n=r$ 时 $A^+ = A\{1,2,3\} = p_2 \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} p_1$, 当 $r=0$

时 $A^+ = A\{1,2,3\} = 0$ 。

参考文献:

[1] 刘轩黄. 某些广义逆矩阵的计算公式[J]. 江西科学, 1988(1):17-22.

[2] 陈芳, 徐仲, 陆全. 分块带状矩阵的逆[J]. 高等学校计算数学学报, 2006, 28(3):209-215.

[3] 何旭初, 孙文瑜. 广义逆矩阵引论[M]. 南京: 江苏科学技术出版社, 1991.

[4] 陈永林. 广义逆矩阵的理论与方法[M]. 南京: 南京师范大学出版社, 2005.

[5] 何楚宁. 矩阵在置换分块下的广义逆通式[J]. 湖南师范大学学报, 2006, 29(4):1-5.

[6] 吴昌志, 魏洪增. 矩阵理论与方法[M]. 北京: 电子工业出版社, 2006.

Given Block of Generalized Inverse Matrix $A\{1\}, A\{1,3\}, A\{1,4\}$

LI Ying, DU Juan

(School of Management of Information, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

Abstract: In many cases certain types of inverse matrix are required for the rectangular matrix or singular matrix. However, in different purposes they have different inverse matrix, namely the generalized inverse matrix. In order to facilitate future computing, the partitioned expression of the generalized inverse matrix $A\{1\}, A\{1,3\}, A\{1,4\}$ is mainly studied and the corresponding proof is given, and then the partitioned expression and the speciality of the generalized inverse matrix $A\{1,2,3\}$ is introduced.

Key words: the generalized inverse matrix; class of the complex matrix; dimensions of matrix