文章编号:1673-1549(2011)04-0383-06

基于 p^6 阶群的一个重要的类

班桂宁, 张　艳, 朱彩凤, 惠　敏

(广西大学数学与信息科学学院, 南宁　530004)

摘　要: 对新的 LA－群的探寻是一项有价值的活动。通过对 p^6 阶群中的第四家族群的定义关系一般化后,再利用群的循环扩张理论和自由群理论对其进行推广,得到了有限 p －群的一个重要的无限类,验证了其是 LA－群,给出了它的一些性质,并进一步的求得在限定参数条件下所给群的性质和其自同构群的阶。

关键词: 有限 p －群;自同构群;阶;扩张

中图分类号: O152. 1　　**文献标识码:** A

引　言

关于有限 p －群的自同构群的阶的最佳下界估计有一个十分著名的 LA－猜想,即:阶大于 p^2 的有限非循环 p －群是其自同构群的阶的因子。满足 LA－猜想的群 G 是 LA－群[1]。近年来,我们已经知道了相当几类 p －群的自同构群的阶以及 LA－群(见文献[2－5])。在前人研究的基础上,文章通过对 p^6 阶群中的 Φ_4[6] 族群的定义关系一般化后,再利用群的循环扩张理论和自由群理论对其进行推广,得到了有限 p －群的一个重要的无限类,验证了它们都是 LA－群,给出了它的一些性质。并引入交换群化为直积的方法,进一步的求得在限定参数条件下所给群的性质和其自同构群的阶。

本文所讨论的群均是有限 p －群,不作特别说明,文中所有参数如 k,k_1 均为非负整数,p 为奇素数。为简便起见,以后在群的定义关系中形如 $[a,b]=1, a,b\in G, r_j, t_j (j=1,2,3)$ 都与 p 互素略去不写。文中引用的术语以及定义均是标准的。

1　相关引理

引理 1. 1[7]　(Van Dyek)设 G 是由生成元 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 和关系 $f_i(x_1,x_2,\cdots x_r)=1, i\in I$ 所定义的群, $H=\langle a_1,a_2,\cdots a_r\rangle$(这些 a_i 可能相同, $\forall i\in I, f_i(a_1,a_2,\cdots a_r)=1$,则存在唯一的满同态 $\sigma: G=F_r/N\to H$ 使得 $x_iN\to a_i$,其中 $F_r=\langle x_1,\cdots,x_r\rangle$ 为自由群, $Y=\langle\{f_i(x_1,x_2,\cdots,x_r)\mid i\in I\}\rangle, N=Y^{F_r}$($Y$ 在 F_r 中的正规闭包), $G=\dfrac{F_r}{N}$。如果 $|G|\leqslant|H|<+\infty$,则上述的 σ 为群同构(即 H 是由生成元 $\{a_1,a_2,\cdots a_r\}$ 与定义关系 $f_i(a_1,a_2,\cdots a_r)=1, \forall i\in I$ 所定义的群)。

引理 1. 2[7]　(关于计算群的自同构群的阶的一个定理)设一个有限群:

$$G=\langle a_1,a_2,\cdots,a_r\mid f_i(a_1,a_2,\cdots,a_r)=1, i\in I\rangle$$

(1)如果 σ 是一个自同构,则对 $\forall i\in I, f_i(\sigma(a_1),\sigma(a_2),\cdots,\sigma(a_r))=1$;(2) 如果 $\sigma: a_i\to a_i'$ 满足 $f_i(a_1',a_2',\cdots,a_r')=1, \forall i\in I$, 且 $G=\langle a_1',a_2',\cdots,a_r'\rangle$, 则 σ 能扩成 G 的一个自同构。

注: $G=\langle a_1,a_2,\cdots,a_r\mid f_i(a_1,a_2,\cdots,a_r)=1, i\in I\rangle, R=\{f_i\mid i\in I\}, H=\langle h_1,h_2,\cdots,h_r\rangle$, 如果 $f_i(h_1,h_2,\cdots,h_r)=1, \forall i\in I$, 则 $\{h_1,h_2,\cdots,h_r\}$ 叫做 G 的一个 $R-Set$ 且 $|\mathrm{Aut}(G)|=|R-Set|$。

引理 1. 3[8]　设 G 是群, $a,b,c\in G$, 则

(1) $[a,b]^{-1}=[b,a]$;

(2) $[ab,c]=[a,c]^b[b,c]$;

收稿日期: 2011-05-16

基金项目: 国家自然科学基金项目(61074185);广西自然科学基金项目(0832054)

作者简介: 班桂宁(1962-),男,广西上林人,教授,博士,主要从事有限群论和数据挖掘方面的研究。

(3) $[a,bc]=[a,c][a,b]^c$。

引理 1.4[8]　设 G 是群，$a,b\in G$ 且 $[a,b]\in Z(G)$，又设 n 是正整数。则有

(1) $[a^n,b]=[a,b]^n$；

(2) $[a,b^n]=[a,b]^n$；

(3) $(ab)^n=a^nb^n[b,a]^{\binom{n}{2}}$。

引理 1.5[8]　设 G 是亚交换群，$a,b\in G,m\geqslant 2,i,j$ 是正整数，则 $(ab^{-1})^m=a^m\prod\limits_{i+j\leqslant m}[ia,jb]^{\binom{m}{i+j}}b^{-m}$。其中求积符号中的 i,j 为正整数，且满足 $i+j\leqslant m$。

引理 1.6　满足下列条件之一的阶大于 p^2 的有限非循环 p －群 G 是 LA－群：

(1) $\Phi(G)$ 循环[1]；

(2) $c(G)=2$ [9]；

(3) $|G/Z(G)|\leqslant p^4$ [10]；

(4) $|G/Z(G)|\leqslant p^5$，但 $Z(G)$ 循环[11-13]；

(5) G 是初等交换群被循环群的扩张[14]。

在此引入将交换群写成素数幂阶循环群的直积的方法简称 WAG 方法

WAG 方法　设 $M=\langle a\rangle\cong(m),G/M=\langle bM\rangle\cong(k)$ 且 $b^{p^k}=a^{tp^s},(p,t)=1,0\leqslant s\leqslant m$，则有 $|b|=p^{k+m-s}$。

(1) $k\leqslant s$；因为 $(b^{-1}a^{tp^{s-k}})^{p^k}=1$，则有 $G=\langle b,a\rangle=\langle b^{-1}a^{tp^{s-k}}\rangle\times\langle a\rangle\cong(k,m)$。

(2) $k\geqslant s$；因为 $(b^{-p^{k-s}}a^t)^{p^s}=1$，则有 $G=\langle b,a\rangle=\langle b\rangle\times\langle b^{-p^{k-s}}a^t\rangle\cong(k+m-s,s)$。如果 $s=0$，则有 $G=\langle b\rangle\cong(k+m)$。

2　主要结果

定理 2.1　设 $G=\langle\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\mid[\alpha_i,\alpha]=\beta_i,\alpha^{p^k}=\beta_1^{r_1p^{s_1}}\beta_2^{t_1p^{u_1}},\alpha_1^{p^{k_1}}=\beta_1^{r_2p^{s_2}}\beta_2^{t_2p^{u_2}},\alpha_2^{p^{k_2}}=\beta_1^{r_3p^{s_3}}\beta_2^{t_3p^{u_3}},\beta_i^{p^{m_i}}=1(i=1,2)\rangle$，其中 $0\leqslant s_j<m_1,0\leqslant u_j<m_2(j=1,2,3)$，则 G 成为一个群的充要条件是 $m_i\leqslant\min\{k,k_i\}(i=1,2),0\leqslant s_j<m_1,0\leqslant u_j<m_2(j=1,2,3)$。进一步在 G 成群的条件下，有 $G=\langle\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\mid[\alpha_i,\alpha]=\beta_i,\beta_1^{r_1p^{s_1}}\beta_2^{t_1p^{u_1}},\alpha_1^{p^{k_1}}=\beta_1^{r_2p^{s_2}}\beta_2^{t_2p^{u_2}},\alpha_2^{p^{k_2}}=\beta_1^{r_3p^{s_3}}\beta_2^{t_3p^{u_3}},\beta_i^{p^{m_i}}=1,m_i\leqslant\min\{k,k_i\}(i=1,2),0\leqslant s_j<m_1,0\leqslant u_j<m_2,(j=1,2,3)\rangle$，亦即定理中所给的关系是群 G 的定义关系，且 $|G|=p^{k+k_1+k_2+m_1+m_2}$。

证明　(Ⅰ)假设定理中所给的 G 是一个群，由换位子 $[\alpha_i,\alpha]=\beta_i(i=1,2)$ 的关系可得 $\alpha_1^{\alpha}=\alpha_1\beta_1,\alpha_2^{\alpha}=\alpha_2\beta_2,\alpha^{\alpha_1}=\alpha\beta_1^{-1},\alpha^{\alpha_2}=\alpha\beta_2^{-1}$，因为 α,α_i 都与 $\beta_i(i=1,2)$ 可交换，① 当 $\alpha_1^{\alpha}=\alpha_1\beta_1$ 时，有 $o(\alpha_1)=o(\alpha_1^{\alpha})=o(\alpha_1\beta_1)$，所以 $\alpha_1=\alpha_1^{\beta_1^{r_1p^{s_1}}\beta_2^{t_1p^{u_1}}}=\alpha_1^{\alpha^{p^k}}=(\alpha_1\beta_1)^{\alpha^{p^k-1}}=\alpha_1^{\alpha^{p^k-1}}\beta_1=\alpha_1\beta_1^{p^k}$，从而 $\beta_1^{p^k}=1$，因 $o(\beta_1)=p^{m_1}$，所以 $p^{m_1}\mid p^k$，等价可得 $k\geqslant m_1$；当 $\alpha^{\alpha_1}=\alpha\beta_1^{-1}$ 时，同理可得 $k_1\geqslant m_1$。② 当 $\alpha_2^{\alpha}=\alpha_2\beta_2$ 时，则有 $o(\alpha_2)=o(\alpha_2^{\alpha})=o(\alpha_2\beta_2)$，所以 $\alpha_2=\alpha_2^{\beta_1^{r_1p^{s_1}}\beta_2^{t_1p^{u_1}}}=\alpha_2^{\alpha^{p^k}}=(\alpha_2\beta_2)^{\alpha^{p^k-1}}=\alpha_2^{\alpha^{p^k-1}}\beta_2=\alpha_2\beta_2^{p^k}$，从而 $\beta_2^{p^k}=1$，因 $o(\beta_2)=p^{m_2}$，所以 $p^{m_2}\mid p^k$，等价的可得 $k\geqslant m_2$；当 $\alpha^{\alpha_2}=\alpha\beta_2^{-1}$ 时，同理可得 $k_2\geqslant m_2$。综上可得 m_i 与 k_i,k 的关系为 $m_i\leqslant\min\{k_i,k\}(i=1,2)$。

(Ⅱ)下面我们利用群的扩张理论和自由群理论来证明在定理所给的条件下群 G 的存在性。

(1) 证明定理中所给群的存在性，首先我们利用群的扩张理论证明群 $G_1=\langle\alpha_1,\beta_1,\beta_2\mid\alpha_1^{p^{k_1}}=\beta_1^{r_2p^{s_2}}\beta_2^{t_2p^{u_2}},\beta_i^{p^{m_i}}=1(i=1,2),0\leqslant s_2<m_1,0\leqslant u_2<m_2\rangle$ 的存在性。令 $N=\langle\beta_1,\beta_2\mid\beta_i^{p^{m_i}}=1(i=1,2)\rangle\cong Z_{p^{m1}}\times Z_{p^{m2}}$，易知 N 是交换群。设 $F=\langle s\rangle$ 是 p^{k_1} 阶循环群。令 $a=\beta_1^{r_2p^{s_2}}\beta_2^{t_2p^{u_2}}\in N$，作在 N 上的映射 $\tau:N\rightarrow N$ 如下：$\beta_1'=\beta_1^{\tau}=\beta_1^{\alpha_1}=\beta_1,\beta_2'=\beta_2^{\tau}=\beta_2^{\alpha_1}=\beta_2$。则有 $\beta_1'^{p^{m_1}}=\beta_2'^{p^{m_2}}=1$，此时 $N=\langle\beta_1',\beta_2'\rangle$，故 τ 可扩成 N 的一个自同构，这样对于 $\tau\in\mathrm{Aut}(N)$，我们有 $a^{\tau}=(\beta_1^{r_2p^{s_2}}\beta_2^{t_2p^{u_2}})^{\tau}=(\beta_1^{\tau r_2p^{s_2}}\beta_2^{\tau t_2p^{u_2}})=\beta_1^{r_2p^{s_2}}\beta_2^{t_2p^{u_2}}=a,\beta_1^{\tau^{p^{k_1}}}=\beta_1,\beta_2^{\tau^{p^{k_1}}}=\beta_2$，从而有 $\tau^{p^{k_1}}=1=a$（这里 a 表示由群元素 a 诱导出的 N 的内自同构）。若此时我们记扩张函数 $f:F\times F\rightarrow N$ 和 $\alpha:F\rightarrow\mathrm{Aut}(N)$ 有如下的形状 $f(s^i,s^j)=\begin{cases}1, & i+j<p^{k_1},\\ a, & i+j\geqslant p^{k_1}.\end{cases}$ $\alpha(s^i)=\tau^i,i=0,1,\cdots,p^{k_1}-1$。则由 Schreier 扩张理论，可得到一个 N 被 F 的扩张 $G_1=\mathrm{Ext}(N,p^{k_1},a,\tau)$，且 $F\cong G_1/N$，设在同构 $\sigma:F\rightarrow G_1/N$ 之下 s 的像为 $\bar{s}N,\bar{s}$ 是陪集 $\bar{s}N$ 中选定的代表元，满足 $\bar{s}^{p^{k_1}}=\beta_1^{r_2p^{s_2}}\beta_2^{t_2p^{u_2}}\in N$，记 $\bar{s}=\alpha_1$，则有 $G_1=\langle\alpha_1,\beta_1,\beta_2\rangle$，$\alpha_1^{p^{k_1}}=\bar{s}^{p^{k_1}}=\beta_1^{r_2p^{s_2}}\beta_2^{t_2p^{u_2}},\beta_i^{p^{m_i}}=1,\beta_i^{\alpha_1}=\beta_i^{\bar{s}}=\beta_i^{\tau}=\beta_i$，即 $[\beta_i,\alpha_1]=1(i=1,2)$。因此群 G_1 是存在的，且从上述证明过程中可得 $|G_1|=p^{k_1+m_1+m_2}$。设 $F=\langle x_1,y_1,y_2\rangle$ 是一个自由群，$S=\{x_1^{p^{k_1}}y_1^{-r_2p^{s_2}}y_2^{-t_2p^{u_2}},y_i^{p^{m_i}},[y_1,y_2],[x_1,y_i](i=1,2)\}$，$N=S^F,\overline{F}=F/N=F/S^F=\langle\overline{x_1},\overline{y_1},\overline{y_2}\rangle$，因此有 $\overline{y_1}^{p^{m_1}}=\overline{y_2}^{p^{m_2}}=1,\overline{x_1}^{p^{k_1}}=\overline{y_1}^{r_2p^{s_2}}\overline{y_2}^{t_2p^{u_2}},[\overline{y_1},\overline{y_2}]=[\overline{x_1},\overline{y_i}]=1(i=1,2)$，这样对于 $\overline{F}$ 的子群 $\overline{H}=\langle\overline{y_1},\overline{y_2}\rangle$ 有 $\overline{H}\rhd\overline{F}$，于是 $\left|\dfrac{\overline{F}}{\overline{H}}\right|=|\langle\overline{x_1}\,\overline{H}\rangle|\leqslant p^{k_1}$，又因为 $|\overline{H}|=$

$|\langle\overline{y_1},\overline{y_2}\rangle| \leqslant p^{m_1+m_2}$，故有 $|\overline{F}| \leqslant p^{k_1}|\overline{H}| \leqslant p^{m_1+m_2+k_1} = |G_1|$，由引理 1.1 可知 $G_1 \cong \overline{F} = F/S^F$，所以群 $G_1 = \langle \alpha_1,\beta_1,\beta_2 \mid \alpha_1^{p^{k_1}} = \beta_1^{r_2p^{s_2}}\beta_2^{t_2p^{u_2}},\beta_i^{p^{m_i}} = 1,(i=1,2),0\leqslant s_2 < m_1,0\leqslant u_2 < m_2\rangle$ 存在且满足所给的定义关系。

(2)其次,我们利用群的扩张理论证明定理中群的存在性，还需再证明 $G_2 = \langle \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \mid \alpha_1^{p^{k_1}} = \beta_1^{r_2p^{s_2}}\beta_2^{t_2p^{u_2}},\alpha_2^{p^{k_2}} = \beta_1^{r_3p^{s_3}}\beta_2^{t_3p^{u_3}},\beta_i^{p^{m_i}} = 1(i=1,2),0\leqslant s_j < m_1,0\leqslant u_j < m_2(j=2,3)\rangle$ 的存在性。设群 $N = G_1$，由(1)知交换群 N 是存在的。设 $F = \langle s\rangle$ 是 p^{k_2} 阶循环群，$a = \beta_1^{r_3p^{s_3}}\beta_2^{t_3p^{u_3}} \in N$，由 Schreier 扩张理论，类似(1)中的证明,可得到 N 被 F 的扩张 $G_2 = \mathrm{Ext}(N,p^{k_2},a,\tau) = \langle \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\rangle$，其中 $\alpha_1^{p^{k_1}} = \beta_1^{r_2p^{s_2}}\beta_2^{t_2p^{u_2}}$，$\alpha_2^{p^{k_2}} = \beta_1^{r_3p^{s_3}}\beta_2^{t_3p^{u3}},\beta_i^{p^{m_i}} = 1(i=1,2),0\leqslant s_j < m_1,0\leqslant u_j < m_2(j=2,3)$。因此群 G_2 是存在的。

(3) 下面还需再利用群的扩张理论证明定理中所给群 G 的存在性。即证明 $G = \langle \alpha,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \mid [\alpha_i,\alpha] = \beta_i,\alpha^{p^k} = \beta_1^{r_1p^{s_1}}\beta_2^{t_1p^{u_1}},\alpha_1^{p^{k_1}} = \beta_1^{r_2p^{s_2}}\beta_2^{t_2p^{u_2}},\alpha_2^{p^{k_2}} = \beta_1^{r_3p^{s_3}}\beta_2^{t_3p^{u_3}},\beta_i^{p^{m_i}} = 1,m_i \leqslant \min\{k,k_i\}(i=1,2),0\leqslant s_j < m_1,0\leqslant u_j < m_2,(j=1,2,3)\rangle$ 的存在性。设群 $N = G_2$，由(2) 知群 N 是存在的。设 $F = \langle s\rangle$ 是 p^k 阶循环群。令 $a = \beta_1^{r_1p^{s_1}}\beta_2^{t_1p^{u_1}} \in \mathbf{N}$，作在 N 上的映射 $\tau:N\to N$ 如下：$\alpha_1{}' = \alpha_1^{\tau} = \alpha_1^{\alpha} = \alpha_1\beta_1,\alpha_2{}' = \alpha_2^{\tau} = \alpha_2^{\alpha} = \alpha_2\beta_2,\beta_1{}' = \beta_1^{\tau} = \beta_1^{\alpha} = \beta_1,\beta_2{}' = \beta_2^{\tau} = \beta_2^{\alpha} = \beta_2$。根据条件 $m_i \leqslant k_{i(i=1,2)}$ 以及引理 1.3 和 1.4，有 $[\alpha_1{}',\alpha_2{}'] = [\alpha_1\beta_1,\alpha_2\beta_2] = 1,[\alpha_1{}',\beta_1{}'] = [\alpha_1\beta_1,\beta_1] = 1,[\alpha_1{}',\beta_2{}'] = [\alpha_1\beta_1,\beta_2] = 1,[\alpha_2{}',\beta_1{}'] = [\alpha_2\beta_2,\beta_1] = 1,[\alpha_2{}',\beta_2{}'] = [\beta_1{}',\beta_2{}'] = 1,\alpha_2{}'^{p^{k_2}} = (\alpha_2\beta_2)^{p^{k_2}} = (\alpha_2\beta_2)^{p^{k_2}} = \alpha_2^{p^{k_2}}\beta_2^{p^{k_2}} = \alpha_2^{p^{k_2}},\alpha_1{}'^{p^{k_1}} = (\alpha_1\beta_1)^{p^{k_1}} = \alpha_1^{p^{k_1}}\beta_1^{p^{k_1}} = \alpha_1^{p^{k_1}},\beta_i{}'^{p^{m_i}} = \beta_i^{p^{m_i}} = 1(i=1,2)$。这样 $\alpha_1{}',\alpha_2{}',\beta_1{}',\beta_2{}'$ 是 N 的满足定义关系的生成元,故 τ 可扩成 N 的一个自同构,对于 $\tau\in \mathrm{Aut}(N)$，根据条件 $m_i\leqslant k(i=1,2)$，我们有 $a^{\tau} = (\beta_1^{r_1p^{s_1}}\beta_2^{t_1p^{u_1}})^{\tau} = (\beta_1^{\tau r_1p^{s_1}}\beta_2^{\tau t_1p^{u_1}}) = \beta_1^{r_1p^{s_1}}\beta_2^{t_1p^{u_1}} = a$，并且 $\alpha_1^{\tau^{p^k}} = (\alpha_1\beta_1)^{\tau^{p^k-1}} = \alpha_1^{\tau^{p^k-1}}\beta_1 = \alpha_1\beta_1^{p^k} = \alpha_1,\alpha_2^{\tau^{p^k}} = (\alpha_2\beta_2)^{\tau^{p^k-1}} = \alpha_2^{\tau^{p^k-1}}\beta_2 = \alpha_2\beta_2^{p^k} = \alpha_2,\beta_1^{\tau^{p^k}} = \beta_1,\beta_2^{\tau^{p^k}} = \beta_2$，从而有 $\tau^{p^k} = 1 = a$(这里 a 表示由群元素 a 诱导出的 N 的内自同构)。若此时我们记扩张函数 $f:F\times F\to N$ 和 $\alpha:F\to \mathrm{Aut}(N)$ 有如下的形状 $f(s^i,s^j) = \begin{cases}1, & i+j < p^k,\\ a, & i+j \geqslant p^k.\end{cases}$ $\alpha(s^i) = \tau^i,i = 0,1,\cdots,p^k-1$。则由 Schreier 扩张理论,可得到一个 N 被 F 的扩张 $G = \mathrm{Ext}(N,p^k,a,\tau) = \langle \alpha,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\rangle$，其中 $[\alpha_i,\alpha] = \beta_i,\alpha^{p^k} = \beta_1^{r_1p^{s_1}}\beta_2^{t_1p^{u_1}},\alpha_1^{p^{k_1}} = \beta_1^{r_2p^{s_2}}\beta_2^{t_2p^{u_2}},\alpha_2^{p^{k_2}} = \beta_1^{r_3p^{s_3}}\beta_2^{t_3p^{u_3}},\beta_i^{p^{m_i}} = 1$。因此群 G 是存在的，且 $|G| = p^{k+k_1+k_2+m_1+m_2}$。

(Ⅲ)最后利用自由群的理论来证明定理中所给的关系即是群 G 的定义关系。

设 $F = \langle x,x_1,x_2,y_1,y_2\rangle$ 是一个自由群，$S = \{x^{p^k}y_1^{-r_1p^{s_1}}y_2^{-t_1p^{u_1}},x_1^{p^{k_1}}y_1^{-r_2p^{s_2}}y_2^{-t_2p^{u_2}},x_2^{p^{k_2}}y_1^{-r_3p^{s_3}}y_2^{-t_3p^{u_3}},y_i^{p^{m_i}},\ [x,x_i]y_i,[x,y_i],[x_1,x_2],[y_1,y_2],[x_i,y_i](i=1,2)\}$，$N = S^F,\overline{F} = F/N = F/S^F = \langle \bar{x},\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{y_1},\overline{y_2}\rangle$，因此有 $\overline{y_1}^{p^{m_1}} = \overline{y_2}^{p^{m_2}} = 1,\bar{x}^{p^k} = \overline{y_1}^{r_1p^{s_1}}\overline{y_2}^{t_1p^{u_1}},\overline{x_1}^{p^{k_1}} = \overline{y_1}^{r_2p^{s_2}}\overline{y_2}^{t_2p^{u_2}},\overline{x_2}^{p^{k_2}} = \overline{y_1}^{r_3p^{s_3}}\overline{y_2}^{t_3p^{u_3}},[\overline{x_i},\bar{x}] = \overline{y_i},[\bar{x},\overline{y_i}] = [\overline{x_1},\overline{x_2}] = [\overline{y_1},\overline{y_2}] = [\overline{x_i},\overline{y_i}] = 1(i=1,2)$，这样对于 $\overline{F}$ 的子群 $\overline{H} = \langle \overline{x_1},\overline{x_2},\overline{y_1},\overline{y_2}\rangle$ 有 $\overline{H}\rhd\overline{F}$，于是 $|\overline{F}/\overline{H}| = |\langle \bar{x}\,\overline{H}\rangle| \leqslant p^k$，又因为 $|\overline{H}| = |\langle \overline{x_1},\overline{x_2},\overline{y_1},\overline{y_2}\rangle| \leqslant p^{k_2+k_1+m_1+m_2}$，故有 $|\overline{F}| \leqslant p^k|\overline{H}| \leqslant p^{k+k_1+k_2+m_1+m_2} = |G|$，由引理 1.1 可知 $G\cong\overline{F} = F/S^F$，所以群 $G = \langle \alpha,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \mid [\alpha_i,\alpha] = \beta_i,\alpha^{p^k} = \beta_1^{r_1p^{s_1}}\beta_2^{t_1p^{u_1}},\alpha_1^{p^{k_1}} = \beta_1^{r_2p^{s_2}}\beta_2^{t_2p^{u_2}},\alpha_2^{p^{k_2}} = \beta_1^{r_3p^{s_3}}\beta_2^{t_3p^{u_3}},\beta_i^{p^{m_i}} = 1,m_i \leqslant\min\{k,k_i\}(i=1,2),0\leqslant s_j < m_1,0\leqslant u_{j<m2},(j=1,2,3)\rangle$ 存在且具有所给的定义关系。

定理 2.2　G 有如下的性质：

(1) $G' = \langle\beta_1\rangle\times\langle\beta_2\rangle,G/G' = \langle\alpha G'\rangle\times\langle\alpha_1G'\rangle\times\langle\alpha_2G'\rangle\cong(k,k_1,k_2)$ 且 G 是 LA－群。

(2) $Z(G) = \langle \alpha^{p^m},\alpha_1^{p^{m_1}},\alpha_2^{p^{m_2}}\rangle\cdot(\langle\beta_1\rangle\times\langle\beta_2\rangle)$，$|Z(G)| = p^{k-m+k_1+k_2}$，其中 $m = \max\{m_1,m_2\}$，群 G 是 PN 群，$|\Phi(G)| = p^{k+k_1+k_2+m_1+m_2-3}$。

(3)当 $k=2,t_1=0,k_i=m_i=1$ 时，若 $s_1=r_2=r_3=t_2=u_3=0,t_3\neq0\neq r_1$，则 $G\cong\Phi_4(321)a$；若 $s_1=r_2=r_3=t_3=u_2=0,t_2\neq0\neq r_1$，则 $G\cong\Phi_4(321)b$；若 $r_1=s_2=t_2=r_3=u_3=0,t_3\neq0\neq r_2$，则 $G\cong\Phi_4(222)b_r$；若 $r_1=r_2=t_3=u_2=s_3=0,t_2\neq0\neq r_3$ 则 $G\cong\Phi_4(222)e_0$；若 $r_1=r_2=u_2=u_3=s_3=0,t_3\neq0\neq r_3,t_2\neq0$，则 $G\cong\Phi_4(222)e_r$。当 $k_1=2,k=k_2=m_i=1$ 时，若 $s_2=t_3=r_1=r_3=u_3=t_2=0,r_2\neq0\neq t_1$，则 $G\cong\Phi_4(321)d$；若 $s_1=t_1=r_2=r_3=u_3=t_2=0,r_1\neq0\neq t_3$，则 $G\cong\Phi_4(222)c$；若 $s_3=t_3=r_1=r_2=u_1=t_2=0,r_3\neq0\neq t_1$，则 $G\cong\Phi_4(222)d_2$；若 $t_1=r_1=r_2=r_3=u_3=t_2=0,t_3\neq0$，则 $G\cong\Phi_4(2211)m$；若 $t_1=r_1=r_3=u_3=s_2=t_2=0,t_3\neq0\neq r_2$，则 $G\cong\Phi_4(321)e_r$。当 $k_2=2,k=k_1=m_i=1$ 时，若 $s_3=t_2=t_3=r_1=r_2=u_1=0,r_3\neq0\neq t_1,G\cong\Phi_4(321)c$；若

$s_3 = t_3 = t_1 = r_1 = r_2 = u_2 = 0, r_2 \neq 0 \neq t_3, G \cong \Phi_4(321)e_r$。

证明 (1)由 G 的定义关系,显然有$\langle \beta_1 \rangle \times \langle \beta_2 \rangle \leqslant G'$,令$\langle \beta_1 \rangle \times \langle \beta_2 \rangle = M$,则对 $\forall g \in G$,有 $M = M^g$,所以 $M \rhd G$,故有 $G/M = \langle \alpha M, \alpha_1 M, \alpha_2 M \rangle$,易证,$G/M$ 是交换群,所以有 $G' \leqslant M$,由此可得 $G' = G_2 = \langle \beta_1 \rangle \times \langle \beta_2 \rangle = M$,故有 $|G'| = p^{m_1+m_2}$,$|G/G'| = p^{k+k_1+k_2}$,又因为 $\alpha^{p^k} \in G'$,${\alpha_1}^{p^{k_1}} \in G'$,${\alpha_2}^{p^{k_2}} \in G'$,所以 $G/G' = \langle \alpha G' \rangle \times \langle \alpha_1 G' \rangle \times \langle \alpha_2 G' \rangle \cong (k, k_1, k_2)$,且$[G_2, G] = G_3 = 1$,所以 $G' \leqslant Z(G)$,$c(G) = 2$,由引理 1.6 可知群 G 是 LA – 群。

(2)对 $\forall g \in \mathbf{Z}(G)$,设 $g = \alpha^x {\alpha_1}^{x_1} {\alpha_2}^{x_2} g_1$,其中 $g_1 \in G' \leqslant Z(G)$,则由引理 1.3 和 1.4 有 $1 = [g, \alpha] = {\beta_1}^{x_1} {\beta_2}^{x_2}$;$1 = [\alpha_1, g] = {\beta_1}^{x}$;$1 = [\alpha_2, g] = {\beta_2}^{x}$,所以有 ${\beta_1}^{x_1} = {\beta_1}^{x_2} = {\beta_1}^{x} = {\beta_2}^{x} = 1$,从而可得 $p^{m_1} \mid x_1, p^{m_2} \mid x_2$,$p^{m_1} \mid x, p^{m_2} \mid x$,根据条件 $m_i \leqslant \min\{k, k_i\}(i = 1,2)$,由 g 的任意性以及 $\alpha^{\max\{p^{m_1}, p^{m_2}\}} \in Z(G)$,${\alpha_1}^{p^{m_1}} \in Z(G)$,${\alpha_2}^{p^{m_2}} \in Z(G)$,$Z(G) = \langle \alpha^{\max\{p^{m_1}, p^{m_2}\}}, {\alpha_1}^{p^{m_1}}, {\alpha_2}^{p^{m_1}} \rangle \cdot (\langle \beta_1 \rangle \times \langle \beta_2 \rangle)$,因为由(1)知 $G' = \langle \beta_1 \rangle \times \langle \beta_2 \rangle$,$G/G' = \langle \alpha G' \rangle \times \langle \alpha_1 G' \rangle \times \langle \alpha_2 G' \rangle \cong (k, k_1, k_2)$,所以 $Z(G)/G' = \langle \overline{\alpha}^{p^m} \rangle \times \langle \overline{\alpha_1}^{p^{m_1}} \rangle \times \langle \overline{\alpha_2}^{p^{m_2}} \rangle$,$m = \max\{m_1, m_2\}$,所以 $|Z(G)/G'| = p^{k-m+k_1-m_1+k_2-m_2}$,则 $|Z(G)| = |Z(G)/G'||G'| = p^{k-m+k_1+k_2}$。令 $P(G) = \langle g^p \mid g \in G \rangle$,则 $P(G) = \langle \alpha^p, {\alpha_1}^p, {\alpha_2}^p, {\beta_1}^p, {\beta_2}^p \rangle$,所以 $\Phi(G) = P(G)G' = \langle \alpha^p, {\alpha_1}^p, {\alpha_2}^p, \beta_1, \beta_2 \rangle$,从而有 $Z(G) < \Phi(G)$,所以 G 是 PN 群,$\Phi(G)/G' = \langle \alpha^p \rangle \times \langle {\alpha_1}^p \rangle \times \langle {\alpha_2}^p \rangle$,从而得到 $|\Phi(G)| = |\Phi(G)/G'||G'| = p^{k+k_1+k_2+m_1+m_2-3}$。

(3)直接验证即可,见文献[6]。

至此,完成该定理的证明。

考虑到参数的取值范围较大,我们在保持原来证明过程和结果不变的情况下,相应的增加一些设置使参数适当的简便化,计算群的自同构群的阶。令 G 的定义关系中的 $t_1 = t_2 = r_2 = r_3 = 0$,则有群 $G = \langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \mid [\alpha_i, \alpha] = \beta_i, \alpha^{p^k} = {\beta_1}^{r_1 p^{s_1}}, {\alpha_2}^{p^{k_2}} = {\beta_2}^{t_3 p^{u_3}}, {\alpha_1}^{p^{k_1}} = {\beta_i}^{p^{m_i}} = 1(i = 1,2), m_i \leqslant \min\{k, k_i\}, 0 \leqslant s_1 < m_1, 0 \leqslant u_3 < m_2 (i = 1,2) \rangle$。

定理 2.3 若 G 为如上的定义关系,则有

(1)当 $k_2 - m_2 \leqslant u_3, k - m \leqslant s_1$ 或者 $k - m > s_1$ 时;当 $k_2 - m_2 > u_3, k - m \leqslant s_1$ 或者 $k - m > s_1$ 时,$Z(G)$ 分别为 $Z(G) = \langle {\alpha_1}^{p^{m_1}} \rangle \times \langle \alpha^{-p^m} {\beta_1}^{r_1 p^{s_1+m-k}} \rangle \times \langle {\alpha_2}^{-p^{m_2}} {\beta_2}^{t_3 p^{u_3-k_2+m_2}} \rangle \times \langle \beta_1 \rangle \times \langle \beta_2 \rangle \cong (k_1 - m_1, k - m, k_2 - m_2, m_1, m_2)$;$Z(G) = \langle {\alpha_1}^{p^{m_1}} \rangle \times \langle \alpha^{-p^{k-s_1}} {\beta_1}^{r_1} \rangle \times \langle {\alpha_2}^{p^{m_2}} \rangle \times \langle \beta_2 \rangle \times \langle {\alpha_2}^{-p^{m_2}} {\beta_2}^{t_3 p^{u_3-k_2+m_2}} \rangle \cong (k_1 - m_1, s_1, k + m_1 - s_1 - m, m_2, k_2 - m_2)$,$Z(G) = \langle {\alpha_1}^{p^{m_1}} \rangle \times \langle \alpha^{-p^m} {\beta_1}^{r_1 p^{s_1+m-k}} \rangle \times \langle {\alpha_2}^{p^{m_2}} \rangle \times \langle {\alpha_2}^{-p^{k_2-u_3}} {\beta_2}^{t_3} \rangle \times \langle \beta_1 \rangle \cong (k_1 - m_1, k - m, k_2 - u_3, u_3, m_1)$;$Z(G) = \langle {\alpha_1}^{p^{m_1}} \rangle \times \langle \alpha^{-p^{k-s_1}} {\beta_1}^{r_1} \rangle \times \langle \alpha^{p^m} \rangle \times \langle {\alpha_2}^{-p^{k_2-u_3}} {\beta_2}^{t_3} \rangle \times \langle {\alpha_2}^{p^{m_2}} \rangle \cong (k_1 - m_1, s_1, k - m + m_1 - s_1, k_2 - u_3, u_3)$。

(2)若令 $r_1 = t_3 = 1$,则 $|\mathrm{Aut}(G)| = p^{10}(p-1)^2$ 或者 $|\mathrm{Aut}(G)| = p^{10}(p-1)$;若令 $r_1 = 0, t_3 = 1$,则 $|\mathrm{Aut}(G)| = p^{10}(p-1)^2$。

(3)当 $k \geqslant k_2 \geqslant k_1 > m_1 = m_2 = 1$ 时,$|\mathrm{Aut}(G)| = (p-1)p^{3k+3k_1+3k_2+3m_1+3m_2-6}$。

证明 (1)由定理2.2 知 $G' = \langle \beta_1 \rangle \times \langle \beta_2 \rangle$,$|Z(G)| = p^{k-m+k_1+k_2}$,下面我们把 $Z(G)$ 表示成素数幂阶循环群的直积。

首先,由定理 2.2 知 $Z(G) = \langle \alpha^{p^m}, {\alpha_1}^{p^{m_1}}, {\alpha_2}^{p^{m_2}} \rangle \cdot (\langle \beta_1 \rangle \times \langle \beta_2 \rangle)$,其中 $m = \max\{m_1, m_2\}$,令 $A = \langle \alpha^{p^m}, {\alpha_2}^{p^{m_2}}, \beta_1, \beta_2 \rangle \leqslant Z(G)$,若 $x \in \langle \alpha_1 \rangle \cap A$,则有 $x = {\alpha_1}^{x_1} = \alpha^{p^{m_1}x} {\alpha_2}^{p^{m_2}x_2} z, z \in (G)$,$\overline{\alpha_1}^{x_1} = \overline{\alpha}^{p^{m_1}x}\, \overline{\alpha_2}^{p^{m_2}x_2}$,这样我们可得到 $p^{k_1} \mid x_1$,所以 $x = {\alpha_1}^{p^{k_1}x_1'} = 1$,$\langle \alpha_1 \rangle A = \langle \alpha_1 \rangle \times A = \langle \alpha_1 \rangle \times \langle \alpha^{p^m}, {\alpha_2}^{p^{m_2}}, \beta_1, \beta_2 \rangle$,所以 $Z(G) = \langle {\alpha_1}^{p^{m_1}} \rangle \times A$,因为 $o({\alpha_1}^{p^{m_1}}) = p^{k_1-m_1}$,从而可得 $|A| = p^{k+k_2-m+m_1}$。

其次,令 $A_1 = \langle {\alpha_2}^{p^{m_2}} \rangle G'$,则 $|A_1| = |{\alpha_2}^{p^{m_2}} G'||G'| = p^{k_2-m_2+m_1+m_2} = p^{k_2+m_1}$,$A_1 \geqslant G' \cong (m_1, m_2)$,$A_1/G' = \langle {\alpha_2}^{p^{m_2}} G' \rangle \cong (k_2 - m_2)$,因为 ${\alpha_2}^{p^{k_2}} = {\beta_2}^{t_3 p^{u_3}}$,$0 \leqslant u_3 < m_2$,所以 $o({\alpha_2}^{p^{m_2}}) = p^{k_2-u_3}$。由 WAG 方法,此时分两种情形:

情形 1 当 $k_2 - m_2 \leqslant u_3$ 时,有 $({\alpha_2}^{-p^{m_2}} {\beta_2}^{t_3 p^{u_3-k_2+m_2}})^{p^{k_2-m_2}} = {\alpha_2}^{-p^{k_2}} {\beta_2}^{t_3 p^{u_3}} = 1$,交换群 $A_1 = \langle {\alpha_2}^{-p^{m_2}} {\beta_2}^{t_3 p^{u_3-k_2+m_2}} \rangle \times \langle \beta_1 \rangle \times \langle \beta_2 \rangle \cong (k_2 - m_2, m_1, m_2)$。令 $A = \langle \alpha^{p^m} \rangle A_1$,则有 $|A| = |\alpha^{p^m} A_1||A_1| = p^{k+k_2-m+m_1}$,$A/A_1 = \langle \alpha^{p^m} A_1 \rangle \cong (k - m)$,因为 $\alpha^{p^k} = {\beta_1}^{r_1 p^{s_1}}$,$0 \leqslant s_1 < m_1$,所以 $o(\alpha^{p^m}) = p^{k+m_1-s_1-m}$。当 $k - m \leqslant s_1$ 时,$(\alpha^{-p^m} {\beta_1}^{r_1 p^{s_1+m-k}})^{p^{k-m}} = \alpha^{-p^k} {\beta_1}^{r_1 p^{s_1}} = 1$,$A = \langle \alpha^{-p^m} {\beta_1}^{r_1 p^{s_1+m-k}} \rangle \times \langle {\alpha_2}^{-p^{m_2}} {\beta_2}^{t_3 p^{u_3-k_2+m_2}} \rangle \times \langle \beta_1 \rangle \times \langle \beta_2 \rangle \cong (k - m, k_2 - m_2, m_1, m_2)$。从而有 $Z(G) = \langle {\alpha_1}^{p^{m_1}} \rangle \times A = \langle {\alpha_1}^{p^{m_1}} \rangle \times \langle \alpha^{-p^m} {\beta_1}^{r_1 p^{s_1+m-k}} \rangle \times \langle {\alpha_2}^{-p^{m_2}} {\beta_2}^{t_3 p^{u_3-k_2+m_2}} \rangle \times \langle \beta_1 \rangle \times \langle \beta_2 \rangle \cong (k_1 - m_1, k - m, k_2 - m_2, m_1, m_2)$。当 $k - m > s_1$ 时,$(\alpha^{-p^{k-s_1}} {\beta_1}^{r_1})^{p^{s_1}} = \alpha^{-p^k} {\beta_1}^{r_1 p^{s_1}} = 1$,$A = \langle \alpha^{-p^{k-s_1}} {\beta_1}^{r_1} \rangle \times \langle {\alpha_2}^{p^{m_2}} \rangle \times \langle \beta_2 \rangle \times \langle {\alpha_2}^{-p^{m_2}} {\beta_2}^{t_3 p^{u_3-k_2+m_2}} \rangle \cong (s_1, k + m_1 - s_1 - m, m_2, k_2 - m_2)$。从而有 $Z(G) = \langle {\alpha_1}^{p^{m_1}} \rangle \times A = \langle {\alpha_1}^{p^{m_1}} \rangle \times \langle \alpha^{-p^{k-s_1}} {\beta_1}^{r_1} \rangle \times$

$\langle \alpha_2^{p^{m_2}} \rangle \times \langle \beta_2 \rangle \times \langle \alpha_2^{-p^{m_2}} \beta_2^{t_3 p^{u_3-k_2+m_2}} \rangle \cong (k_1 - m_1, s_1, k + m_1 - s_1 - m, m_2, k_2 - m_2)$。

情形2 当 $k_2 - m_2 > u_3$ 时,则有 $(\alpha_2^{-p^{k_2-u_3}} \beta_2^{t_3})^{p^{u_3}} = \alpha_2^{-p^{k_2}} \beta_2^{t_3 p^{u_3}} = 1$, 交换群 $A_1 = \langle \alpha_2^{-p^{k_2-u_3}} \beta_2^{t_3} \rangle \times \langle \alpha_2^{p^{m_2}} \rangle \times \langle \beta_1 \rangle \cong (u_3, k_2 - u_3, m_1)$。令 $A = \langle \alpha^{p^m} \rangle A_1$, 由 WAG 方法当 $k - m \leqslant s_1$ 或者 $k - m > s_1$ 时,类似情形 1,从而可得 $Z(G)$ 分别为 $Z(G) = \langle \alpha_1^{p^{m_1}} \rangle \times A = \langle \alpha_1^{p^{m_1}} \rangle \times \langle \alpha^{-p^m} \beta_1^{r_1 p^{s_1+m-k}} \rangle \times \langle \alpha_2^{p^{m_2}} \rangle \times \langle \alpha_2^{-p^{k_2-u_3}} \beta_2^{t_3} \rangle \times \langle \beta_1 \rangle \cong (k_1 - m_1, k - m, k_2 - u_3, u_3, m_1)$;$Z(G) = \langle \alpha_1^{p^{m_1}} \rangle \times A = \langle \alpha_1^{p^{m_1}} \rangle \times \langle \alpha^{-p^{k-s_1}} \beta_1^{r_1} \rangle \times \langle \alpha^{p^m} \rangle \times \langle \alpha_2^{-p^{k_2-u_3}} \beta_2^{t_3} \rangle \times \langle \alpha_2^{p^{m_2}} \rangle \cong (k_1 - m_1, s_1, k - m + m_1 - s_1, k_2 - u_3, u_3)$。

(2)若令 $r_1 = t_3 = 1$;或者令 $r_1 = 0, t_3 = 1$ 时,由文献[6]知 G 分别为 $\Phi_4(321)a, \Phi_4(222)c, \Phi_4(2211)m$, 由文献[15]知它们的自同构群阶分别为 $|\mathrm{Aut}(G)| = p^{10}(p-1)^2$; $|\mathrm{Aut}(G)| = p^{10}(p-1)$; $|\mathrm{Aut}(G)| = p^{10}(p-1)^2$。

(3)当 $m_1 = m_2 = 1$ 时, $s_1 = u_3 = 0$, 则群 $G = \langle \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \mid [\alpha_i, \alpha] = \beta_i, \alpha^{p^k} = \beta_1^{r_1}, \alpha_2^{p^{k_2}} = \beta_2^{t_3}, \alpha_1^{p^{k_1}} = \beta_i^{p^{m_i}} = 1 (i = 1,2), m_i \leqslant \min\{k, k_i\}, 0 \leqslant s_1 < m_1, 0 \leqslant u_3 < m_2 (i = 1,2) \rangle$。首先设 $x \in G, \sigma \in \mathrm{Aut}(G)$, 用 x' 表示 $\sigma(x)$, 令 $\alpha' = \alpha^x \alpha_1^{x_1} \alpha_2^{x_2} \beta_1^{x_3} \beta_2^{x_4}, \alpha_1' = \alpha^y \alpha_1^{y_1} \alpha_2^{y_2} \beta_1^{y_3} \beta_2^{y_4}, , \alpha_2' = \alpha^z \alpha_1^{z_1} \alpha_2^{z_2} \beta_1^{z_3} \beta_2^{z_4}$, 其中 $x, y, z, x_i, y_i, z_i (i = 1,2,3,4)$ 是正整数,根据引理 1.3—1.5,则有 $\beta_1' = [\alpha_1', \alpha'] = \beta_1^{y_1 x - x_1 y} \beta_2^{y_2 x - x_2 y}$;

$\beta_2' = [\alpha_2', \alpha'] = \beta_1^{z_1 x - z x_1} \beta_2^{z_2 x - z x_2}$;

$1 = [\alpha_1', \alpha_2'] = \beta_1^{y_1 z - z_1 y} \beta_2^{y_2 z - z_2 y}$;

$(\alpha')^{p^k} = (\alpha^x \alpha_1^{x_1} \alpha_2^{x_2} \beta_1^{x_3} \beta_2^{x_4})^{p^k} = \alpha^{x p^k} \alpha_1^{x_1 p^k} \alpha_2^{x_2 p^k}$;

$(\alpha')^{p^k} = \beta_1'^{r_1} = \beta_1^{r_1(y_1 x - x_1 y)} \beta_2^{r_1(y_2 x - x_2 y)}$;

$1 = (\alpha_1')^{p^{k_1}} = \alpha^{y p^{k_1}} \beta_2^{y y_2 \binom{p^{k_1}}{2} + y_4 p^{k_1}} \alpha_2^{y_2 p^{k_1}}$;

$(\alpha_2')^{p^{k_2}} = (\alpha^z \alpha_1^{z_1} \alpha_2^{z_2} \beta_1^{z_3} \beta_2^{z_4})^{p^{k_2}}$

$= \alpha^{z p^{k_2}} \alpha_1^{z_1 p^{k_2}} \alpha_2^{z_2 p^{k_2}} \beta_1^{z_3 p^{k_2} + z_1 z \binom{p^{k_2}}{2}}$;

$(\alpha_2')^{p^{k_2}} = \beta_2'^{t_3} = \beta_1^{t_3(z_1 x - z x_1)} \beta_2^{t_3(z_2 x - z x_2)}$。

因为 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ 是生成元,所以

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \not\equiv 0 (\mathrm{mod} p)$$ ①,当 $k \geqslant k_2 \geqslant k_1 > m_1 = m_2 = 1$ 时,令 $y = y p^{k-k_1}, y_2 = y_2 p^{k_2-k_1}, z = z p^{k-k_2}$, 则可设 $\alpha' = \alpha^x \alpha_1^{x_1} \alpha_2^{x_2} \beta_1^{x_3} \beta_2^{x_4}, \alpha_1' = \alpha^{y p^{k-k_1}} \alpha_1^{y_1} \alpha_2^{y_2 p^{k_2-k_1}} \beta_1^{y_3} \beta_2^{y_4}, \alpha_2' = \alpha^{z p^{k-k_2}} \alpha_1^{z_1} \alpha_2^{z_2} \beta_1^{z_3} \beta_2^{z_4}$, 此时有

$\beta_1' = [\alpha_1', \alpha'] = \beta_1^{y_1 x - x_1 y p^{k-k_1}} \beta_2^{y_2 x - x_2 y p^{k-k_1}}$;

$\beta_2' = [\alpha_2', \alpha'] = \beta_1^{z_1 x - x_1 z p^{k-k_2}} \beta_2^{z_2 x - x_2 z p^{k-k_2}}$;

$1 = [\alpha_1', \alpha_2'] = \beta_1^{y_1 z p^{k-k_2} - z_1 y p^{k-k_1}} \beta_2^{y_2 z p^{k_2-k_1} - z_2 y p^{k-k_1}}$;

$(\alpha')^{p^k} = \alpha^{x p^k} \alpha_1^{x_1 p^k} \alpha_2^{x_2 p^k} = \beta_1^{x r_1} \beta_2^{x_2 t_3 p^{k-k_2}}$;

$(\alpha')^{p^k} = \beta_1'^{r_1} = \beta_1^{r_1(y_1 x - x_1 y p^{k-k_1})} \beta_2^{r_1(y_2 x - x_2 y p^{k-k_1})}$;

$1 = (\alpha_1')^{p^{k_1}} = \alpha^{y p^{k_1}} \alpha_2^{y_2 p^{k_1}} = \beta_1^{y r_1} \beta_2^{y_2 t_3}$;

$(\alpha_2')^{p^{k_2}} = \alpha^{z p^{k_2}} \alpha_1^{z_1 p^{k_2}} \alpha_2^{z_2 p^{k_2}} \beta_1^{z_3 p^{k_2} + z_1 z \binom{p^{k_1}}{2}} = \beta_1^{z r_1} \beta_2^{z_2 t_3}$;

$(\alpha_2')^{p^{k_2}} = \beta_2'^{t_3} = \beta_1^{t_3(z_1 x - x_1 z p^{k-k_2})} \beta_2^{t_3(z_2 x - x_2 z p^{k-k_2})}$。

结合①可得以下的同余方程组:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \not\equiv 0 (\mathrm{mod} p) \quad (1)$$

$$y_1 z p^{k-k_2} - z_1 y p^{k-k_1} \equiv 0 (\mathrm{mod} p) \quad (2)$$

$$y_2 z p^{k_2-k_1} - z_2 y p^{k-k_1} \equiv 0 (\mathrm{mod} p) \quad (3)$$

$$x r_1 \equiv r_1 (y_1 x - x_1 y p^{k-k_1}) (\mathrm{mod} p) \quad (4)$$

$$x_2 t_3 p^{k-k_2} \equiv r_1 (y_2 x - x_2 y p^{k-k_1}) (\mathrm{mod} p) \quad (5)$$

$$y r_1 \equiv 0 (\mathrm{mod} p) \quad (6)$$

$$y_2 t_3 \equiv 0 (\mathrm{mod} p) \quad (7)$$

$$z r_1 \equiv t_3 (z_1 x - x_1 z p^{k-k_2}) (\mathrm{mod} p) \quad (8)$$

$$z_2 t_3 \equiv t_3 (z_2 x - x_2 z p^{k-k_2}) (\mathrm{mod} p) \quad (9)$$

由上面可知(2)、(3)式自然成立,(6)、(7)分别可以转化为 $y \equiv 0 (\mathrm{mod} p), y_2 \equiv 0 (\mathrm{mod} p)$, 此时(5)自然成立,将其带入(1)则有 $y_1 \begin{vmatrix} x & z \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, 即 $y_1 (x z_2 - z x_2) \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$ (10),由(4)有 $x(y_1 - 1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, 即 $x \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, 当 $x \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$ 时(8)可转化为 $x_1 t_3 z p^{k-k_2} + z r_1 \equiv t_3 z_1 x (\mathrm{mod}\ p)$, 从而有 $z_1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, 则(9)可转化为 $z_2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, 从而(10)式可化简得 $y_1 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$。于是综上可得同余关系 $y_1 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p), y \equiv y_2 \equiv x \equiv z \equiv z_2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, 其中 $x_1, x_2, x_3, x_4, y_3, y_4, z_1, z_3, z_4$ 自由的,所以 $|\mathrm{Aut}(G)| = (p-1) p^{(k_1-1)+3(k-1)+2(k_2-1)+2k_1+k_2+3m_1+3m_2} = (p-1) p^{3k+3k_1+3k_2+3m_1+3m_2-6}$。

至此,完成该定理的证明。

注:在定理 2.1 中由于参数较多,直接计算自同构群的阶难度较大,因此对参数作适当的限定可以得到不同类别的群,用类似的方法可以计算出群 G 在限定条件下的自同构群的阶。

参 考 文 献:

[1] Exarchakos T.LA-groups[J].J Math Soc Japan,1981,33

(2):185-190.
[2] 班桂宁,张 玉,吴建平,等.基于 p^5 阶 Φ_2 族群的 LA-群[J].广西师范学院学报:自然科学版,2008,25(3):1-4.
[3] 班桂宁,刘 惠,佘 科,等.一类 p^6 阶群的推广[J].广西师范学院学报:自然科学版,2010,27(3):7-11.
[4] 班桂宁,佘 科,刘 惠,等.有限 p-群的两个重要的类[J].广西科学,2010,17(4):277-281.
[5] 班桂宁,李芳芳,刘 惠,等.一类基于 p^5 阶群的 LA-群[J].贵州大学学报:自然科学版,2010,27(6):1-4.
[6] Rodney James.The groups of order p^6 (p an odd prime)[J]. Math.Comput.1980,34:613-637.
[7] 徐明曜.有限群导引(上,下):2 版[M].北京:科学出版社,2001.
[8] 班桂宁,俞曙霞.一类 p-群的自同构群的阶[J].数学学报,1992,35(4):570-574.
[9] Faudree R. A note on the automorphism group of a p-group [J].Proc Amer.Math.Soc.,1968,19:1379-1382.
[10] Davitt R M. On the automorphism group of a finite p-group with a small central quotient[J].Can.J.Math.,1980,32(5):1168-1176.
[11] 俞曙霞,班桂宁.若干 LA-群及有关定理[J].广西大学学报:自然科学版,1993,18(1):6-13.
[12] Ban Gunning, Zhang Jinsong, Yu Shuxia. The lower bound for the order of the automorphism groups[J]. Proc. Roy.Irish Acad.Vol.A,1996,96(2):159-167.
[13] 俞曙霞,班桂宁.关于 LA-群的一个定理[J].广西大学学报:自然科学版,1994,19(1):1-8.
[14] Ban Guining,Li Shiyu,Zhang Jinsong.The new series of LA-groups[J].Chin Quart J of Math,1994,9(2):73-78.
[15] 班桂宁,张新政,王 勇. p-群的自同构群的阶[J].西南师范大学学报:自然科学版,2005,30(4):600-603.

An Important Class Based on the Group of Order p^6

BAN Gui-ning, *ZHANG Yan*, *ZHU Cai-feng*, *HUI Min*
(School of Mathematics and Information Sciences, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: Exploring new LA-group is considered a valuable activity. After the forth family group of order p^6 is generalizated, an important infinite class of p- group is obtained by extending theory of cyclic group and free theory. It is proved that they are all LA-groups. Their some properties are given, and the order of its automorphism is then calculated in a limited parameter conditions.

Key words: finite p- group; automorphism group; order; extension