

不定方程 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n$ 有非负整数解的充要条件

管训贵

(泰州师范高等专科学校, 江苏 泰州 225300)

摘要:给出不定方程 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n$ 的非负整数解的一个判定准则. 主要结果为:如果正整数 n 有标准分解式 $n = 2^r p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$, 其中 p_1, p_2, \dots, p_k 是适合 $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ 的奇素数, r, r_1, r_2, \dots, r_k 是正整数, 则该方程有非负整数解的充要条件是 $p_1 \neq 3$; 或 $p_1 = 3$ 时, $r_1 \geq 2$. 从而解决了这一形式的不定方程求非负整数解的问题。

关键词:不定方程;非负整数解;标准分解式;判定准则;充要条件

中图分类号:O156

文献标识码:A

引 言

对不定方程

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n \tag{1}$$

的研究不少文献“有所涉及^[1-4]”。遗憾的是,均未能给出(1)有非负整数解的判别条件。本文给出

定理 1 设 n 的标准分解式为

$$n = 2^r p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k},$$

其中 $p_i (i = 1, \dots, k)$ 均为奇素数,且 $p_1 < \dots < p_k, r$ 与 $r_i (i = 1, \dots, k)$ 均为正整数,则(1)有非负整数解的充要条件是

$$p_1 \neq 3; \text{ 或 } p_1 = 3 \text{ 时, } r_1 \geq 2 \tag{2}$$

1 引 理

引理 1 设 p 为奇素数,则不定方程

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p \tag{3}$$

有非负整数解的充要条件是 $p \neq 3$ 。

证明 充分性

若 $p \equiv 1 \pmod{3}$, 可设 $p = 1 + 3t (t \text{ 为正整数})$, 则(3)显然有非负整数解 $x = t, y = t, z = t + 1$; 若 $p \equiv$

$2 \pmod{3}$, 可设 $p = 2 + 3t (t \text{ 为正整数})$, 则(3)显然有非负整数解 $x = t, y = t + 1, z = t + 1$ 。

必要性

由(3)式,得

$$(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] = 2p \tag{4}$$

易知 x, y, z 不全相等, 否则(4)式不能成立. 于是不妨设 $x < y < z$ 或 $x = y < z$ 或 $x < y = z$ 。

因 $x + y + z \geq 3$, 故由(4)式及文献[5]的证明过程知

$$\begin{aligned} x + y + z &= p, \\ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 &= 2 \end{aligned} \tag{5}$$

或

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2p, \\ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 &= 1 \end{aligned} \tag{6}$$

(i) 若 $x < y < z$, 则

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 6. \text{ 这时(5)、(6)}$$

两式均不能成立。

(ii) 若 $x = y < z$, 则

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 2. \text{ 这时(6)式不}$$

能成立,而由(5)式得

$$x + y + z = p, z - x = 1$$

令 $x = y = t$, 则 $z = t + 1, p = 3t + 1$, 即 $p \equiv 1 \pmod{3}$ 。

(iii) 若 $x < y = z$, 则

$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 2$ 。这时(6)式仍不能成立,而由(5)式得

$$x + y + z = p, y - x = 1$$

令 $x = t$, 则 $y = z = t + 1, p = 3t + 2$, 即 $p \equiv 2 \pmod{3}$ 。

引理2 若 (x_i, y_i, z_i) 为不定方程 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n_i (i = 1, \dots, k)$ 的一组非负整数解, 则 (X, Y, Z) 为不定方程 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \prod_{i=1}^k n_i$ 的一组非负整数解, 其中 (X, Y, Z) 由行列式

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \\ Y & Z & X \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^k \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ z_i & x_i & y_i \\ y_i & z_i & x_i \end{vmatrix}$$

确定。

证明 显然有

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

若 $x_i^3 + y_i^3 + z_i^3 - 3x_i y_i z_i = n_i$, 即

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ z_i & x_i & y_i \\ y_i & z_i & x_i \end{vmatrix} = n_i (i = 1, 2), \text{ 则}$$

$$n_1 n_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ z_1 & x_1 & y_1 \\ y_1 & z_1 & x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ z_2 & x_2 & y_2 \\ y_2 & z_2 & x_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x_1 x_2 + y_1 z_2 + z_1 y_2 & x_1 y_2 + y_1 x_2 + z_1 z_2 & x_1 z_2 + y_1 y_2 + z_1 x_2 \\ x_1 z_2 + y_1 y_2 + z_1 x_2 & x_1 x_2 + y_1 z_2 + z_1 y_2 & x_1 y_2 + y_1 x_2 + z_1 z_2 \\ x_1 y_2 + y_1 x_2 + z_1 z_2 & x_1 z_2 + y_1 y_2 + z_1 x_2 & x_1 x_2 + y_1 z_2 + z_1 y_2 \end{vmatrix}$$

可见 (X, Y, Z) 为不定方程

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n_1 n_2$$

的一组非负整数解, 其中

$$X = x_1 x_2 + y_1 z_2 + z_1 y_2$$

$$Y = x_1 y_2 + y_1 x_2 + z_1 z_2$$

$$Z = x_1 z_2 + y_1 y_2 + z_1 x_2$$

由数学归纳法易证引理2结论成立。

引理3 设 r 为正整数, 则不定方程

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2^r \tag{7}$$

一定有非负整数解。

证明 易知 $(0, 1, 1)$ 为不定方程 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2$ 的一组非负整数解. 设 (a_r, b_r, c_r) 为不定方程(7)的一组非负整数解, 则由引理2知

$$\begin{vmatrix} a_r & b_r & c_r \\ c_r & a_r & b_r \\ b_r & c_r & a_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}^r$$

故

$$\begin{vmatrix} a_{r+1} & b_{r+1} & c_{r+1} \\ c_{r+1} & a_{r+1} & b_{r+1} \\ b_{r+1} & c_{r+1} & a_{r+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_r & b_r & c_r \\ c_r & a_r & b_r \\ b_r & c_r & a_r \end{vmatrix} \tag{8}$$

展开(8)式右边得

$$\begin{cases} a_{r+1} = b_r + c_r \\ b_{r+1} = c_r + a_r \\ c_{r+1} = a_r + b_r \end{cases} \tag{9}$$

将(9)式中三式相加, 得

$$a_{r+1} + b_{r+1} + c_{r+1} = 2(a_r + b_r + c_r)$$

又 $a_1 + b_1 + c_1 = 2$, 故

$a_r + b_r + c_r = 2^r$, 而 $a_{r+1} = b_r + c_r$, 因此 $a_r + a_{r+1} = 2^r$, 即

$$(-1)^{r+1} a_{r+1} - (-1)^r a_r = -(-2)^r, \text{ 递推得:}$$

$$(-1)^r a_r + a_1 = \frac{2}{3}[1 - (-2)^{r-1}]$$

考虑到 $a_1 = 0$, 有

$$a_r = \frac{2}{3}[2^{r-1} + (-1)^r]$$

于是

$$b_r = c_r = \frac{1}{2}(2^r - a_r) = \frac{1}{3}[2^r - (-1)^r]$$

故(7)的一组非负整数解 (x, y, z) 为

$$x = \frac{2}{3}[2^{r-1} + (-1)^r]$$

$$y = z = \frac{1}{3}[2^r - (-1)^r]$$

引理4 设正整数 $r \geq 2$, 则不定方程

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 3^r \tag{10}$$

有一组非负整数解

$$x = 3^{r-2} - 1, y = 3^{r-2}, z = 3^{r-2} + 1 \quad (11)$$

证明 将(11)直接代入(10)验算便知结论成立。

引理5 设 n_1 为正整数,且 $3 \nmid n_1$, 则不定方程

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 3n_1 \quad (12)$$

没有非负整数解。

证明 由文献[6]的讨论方法知

(i) 若 $x \equiv 0 \pmod{3}, y \equiv 0 \pmod{3}, z \equiv 0 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 1 \pmod{3}, y \equiv 1 \pmod{3}, z \equiv 1 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 2 \pmod{3}, y \equiv 2 \pmod{3}, z \equiv 2 \pmod{3}$,

则 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv 0 \pmod{9}$ 。

(ii) 若 $x \equiv 0 \pmod{3}, y \equiv 0 \pmod{3}, z \equiv 1 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 0 \pmod{3}, y \equiv 1 \pmod{3}, z \equiv 0 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 1 \pmod{3}, y \equiv 0 \pmod{3}, z \equiv 0 \pmod{3}$,

则 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv 1 \pmod{9}$ 。

(iii) 若 $x \equiv 0 \pmod{3}, y \equiv 0 \pmod{3}, z \equiv 2 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 0 \pmod{3}, y \equiv 2 \pmod{3}, z \equiv 0 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 2 \pmod{3}, y \equiv 0 \pmod{3}, z \equiv 0 \pmod{3}$,

则 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv 8 \pmod{9}$ 。

(iv) 若 $x \equiv 1 \pmod{3}, y \equiv 1 \pmod{3}, z \equiv 0 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 1 \pmod{3}, y \equiv 0 \pmod{3}, z \equiv 1 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 0 \pmod{3}, y \equiv 1 \pmod{3}, z \equiv 1 \pmod{3}$,

则 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv 2 \pmod{9}$ 。

(v) 若 $x \equiv 1 \pmod{3}, y \equiv 1 \pmod{3}, z \equiv 2 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 1 \pmod{3}, y \equiv 2 \pmod{3}, z \equiv 1 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 2 \pmod{3}, y \equiv 1 \pmod{3}, z \equiv 1 \pmod{3}$,

则 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv 4 \pmod{9}$ 。

(vi) 若 $x \equiv 2 \pmod{3}, y \equiv 2 \pmod{3}, z \equiv 0 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 2 \pmod{3}, y \equiv 0 \pmod{3}, z \equiv 2 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 0 \pmod{3}, y \equiv 2 \pmod{3}, z \equiv 2 \pmod{3}$,

则 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv 7 \pmod{9}$ 。

(vii) 若 $x \equiv 2 \pmod{3}, y \equiv 2 \pmod{3}, z \equiv 1 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 2 \pmod{3}, y \equiv 1 \pmod{3}, z \equiv 2 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 1 \pmod{3}, y \equiv 2 \pmod{3}, z \equiv 2 \pmod{3}$,

则 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv 5 \pmod{9}$ 。

(viii) 若 $x \equiv 0 \pmod{3}, y \equiv 1 \pmod{3}, z \equiv 2 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 0 \pmod{3}, y \equiv 2 \pmod{3}, z \equiv 1 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 1 \pmod{3}, y \equiv 0 \pmod{3}, z \equiv 2 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 1 \pmod{3}, y \equiv 2 \pmod{3}, z \equiv 0 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 2 \pmod{3}, y \equiv 0 \pmod{3}, z \equiv 1 \pmod{3}$,

或 $x \equiv 2 \pmod{3}, y \equiv 1 \pmod{3}, z \equiv 0 \pmod{3}$,

则 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv 0 \pmod{9}$ 。

综上,(12)没有非负整数解。

2 定理的证明

充分性:由引理1、引理2、引理4及引理5知,若奇素数 $p \neq 3$, 则不定方程

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p^r \quad (r \text{ 为正整数}) \quad (13)$$

一定有非负整数解,并且可由(3)的非负整数解导出. 若 $p = 3, r \geq 2$, 则(13)的非负整数解可直接由(10)的非负整数解给出. 再由引理2、引理3、引理4及(13)式知,满足条件(2)的不定方程(1)一定有非负整数解,并且可由(7)、(10)、(13)的非负整数解导出。

必要性:由引理4及引理5知,若(1)有非负整数解,则 $p_1 \neq 3$; 或 $p_1 = 3$ 时, $r_1 \geq 2$ 。

综上所述,定理得证。

3 应用举例

例1 试证:不定方程

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1275$$

无非负整数解。

证明 因为 $1275 = 3 \times 425$, 而 $3 \nmid 425$, 所以原不定方程无非负整数解。

例2 试求 不定方程

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 123480$$

的一组非负整数解。

解 123480 的标准分解式为

$$123480 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^3$$

由引理3知,方程

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2^3$$

的一组非负整数解为

$$(x, y, z) = (2, 3, 3)$$

由引理4知,方程

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 3^2$$

的一组非负整数解为

$$(x, y, z) = (0, 1, 2)$$

由引理1知,方程

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 5$$

的一组非负整数解为

$$(x, y, z) = (1, 2, 2)$$

而方程

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 7$$

的一组非负整数解为

$$(x, y, z) = (2, 2, 3)$$

若设原不定方程的一组非负整数解为 (X, Y, Z) ,

则

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \\ Y & Z & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}^3 = \begin{vmatrix} 13719 & 13720 & 13721 \\ 13721 & 13719 & 13720 \\ 13720 & 13721 & 13719 \end{vmatrix}$$

于是原不定方程的一组非负整数解为 $(X, Y, Z) = (13719, 13720, 13721)$ 。

参考文献:

- [1] 华罗庚.数论导引[M].北京:科学出版社,1979.
- [2] 李盛.不定方程 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \prod_{i=1}^m n_i$ 解的性质[J].宁波教育学院学报,2008(6):71-73.
- [3] 柯召,孙琦.谈谈不定方程[M].上海:上海教育出版社,1980.
- [4] 曹珍富.丢番图方程引论[M].黑龙江:哈尔滨工业大学出版社,1989.
- [5] 管训贵.关于不定方程 $x^2 + (p-1)y^2 = pz^2$ [J].河北北方学院学报:自然科学版,2010,26(1):12-14.
- [6] 管训贵.三个著名数学猜想的等价命题[J].四川理工学院学报:自然科学版,2009,22(2):3-4.

Sufficient and Necessary Condition for the Non-negative Integer Solution to Indefinite Equation $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n$

GUAN Xun-gui

(Department of Mathematics and Physics, Taizhou Normal College, Taizhou 225300, China)

Abstract: A criterion of the non-negative integer solution is given to indefinite equation $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n$. The main result is: If positive integer n has a standard decomposition $n = 2^r p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$, where p_1, p_2, \dots, p_k are odd primes satisfying that $p_1 < p_2 < \dots < p_k, r, r_1, r_2, \dots, r_k$ are positive integer, then a sufficient and necessary condition for the non-negative integer solution to the equation is $p_1 \neq 3$ or $p_1 = 3$ with $r_1 \geq 2$. Thus a non-negative integer solution to this kind of indefinite equation is solved.

Key words: indefinite equation; non-negative integer solution; standard decomposition; criterion; sufficient and necessary condition