文章编号: 1673-1549(2011)02-0165-03

一个不定方程及其整数解

霍梦圆

(重庆师范大学数学学院, 重庆 401331)

摘 要: 文章利用初等方法、整数的整除性质以及数列 $\{k^{\frac{1}{k}}\}$ 的单调递减性质等知识, 分各种可能的情形讨论了不定方程 $x^y + y^z + z^w + w^x = 0$ 的可解性, 并求出了该方程的所有整数解, 给出了三组通解表达式: $(x, y, z, w) = (a, 1, -2-a, 1)$, $(1, b, 1, -2-b)$, $(k, k, -k, -k)$, 其中 a, b 为任意整数, k 为任意的奇数. 但对其个别情况尚需要进一步研究。

关键词: 初等方法; 不定方程; 整数解

中图分类号: O156.4 文献标识码: A

引 言

不定方程的求解问题历来受到人们的重视, 但解起来却非常困难。刘燕妮、郭晓艳研究了不定方程

$$x^y + y^z + z^x = 0 \quad (1)$$

的整数解, 并求出了全部解。本文将 $x^y + y^z + z^w + w^x = 0$ 的结果整理出来。

1 引 理

引理: $k \geqslant 3$ 时, 数列 $\{k^{\frac{1}{k}}\}$ 是单调递减的。

2 结 论

定理 方程

$$x^y + y^z + z^w + w^x = 0 \quad (2)$$

的解分别是

$(x, y, z, w) = (a, 1, -2-a, 1)$
$(1, b, 1, -2-b)$, $(k, k, -k, -k)$。
(a, b 为任意整数, k 为任意的奇数)

3 定理的证明

3.1 $xyzw = 0$ 的情况

①x, y, z, w 中有一个为 0。设 $x = 0$, $y > 0$, $z \neq 0$, $w \neq 0$ 方程 (2) 变为 $y^z + z^w = -1$, 因此 $z < 0$, w 为奇数, 而 $0 < y^z \leqslant 1$, $1 < |z^w| = |-1-y^z| \leqslant 2$

$$|z^w| = 2 \Rightarrow z = -2, w = 1 \Rightarrow x = 0, y = 1$$

此时 $(x, y, z, w) = (0, 1, -2, 1)$ 是方程 (2) 的一组解。由 x, y, z, w 的对称性立刻得到方程 (2) 有三组解, $(x, y, z, w) = (1, 0, 1, -2)$ $(-2, 1, 0, 1)$, $(1, -2, 1, 0)$。

②x, y, z, w 中有两个为 0。设 $x = 0$, $z = 0$, $y > 0$, $w > 0$ 方程 (2) 变为 $0^y + y^0 + 0^w + w^0 = 0$, 即 $2 = 0$, 矛盾, 由于 0^0 的没有意义, 所以 x, y, z, w 中不可能有三个以上为 0, 因此满足 $xyzw = 0$ 的方程 (2) 的解分别是

$(x, y, z, w) = (0, 1, -2, 1)$, $(1, 0, 1, -2)$,
$(-2, 1, 0, 1)$, $(1, -2, 1, 0)$

3.2 $xyzw \neq 0$ 的情况

由于 $xyzw \neq 0$, 显然 x, y, z, w 至少有一个是负数, 否则 $x^y + y^z + z^w + w^x > 0$ 与方程 (2) 矛盾。

①x, y, z, w 有一个为负数。设 $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$, $w > 0$

方程 (2) 为 $$x^y + y^z + z^w = -\frac{1}{w^{-x}} \quad (3)$$

由于左边为整数, 由假设很容易推得当且仅当 $w^{-x} = 1$ 时方程 (3) 成立, 得到

$$x^y + y^z + z = -1 \quad (4)$$

显然要使方程 (4) 有解, y 必须为奇数

若 $y = 1$, 方程 (4) 变为 $x + z = -2$

令 $x = a$ (a 为任意负整数)

则 $(x, y, z, w) = (a, 1, -2-a, 1)$ 是方程 (2) 的一组解. 由 x, y, z, w 的对称性立刻得到方程 (2) 的其它三

收稿日期: 2010-12-03

基金项目: 西南大学博士基金项目 (SWUB2006053)

作者简介: 霍梦圆 (1987-), 女, 重庆綦江人, 硕士生, 主要从事数论方面的研究。

组通解, 分别是 $(x, y, z, w) = (1, a, 1, -2-a)$, $(-2-a, 1, a, 1)$, $(1, -2-a, 1, a)$

若 $y \neq 1$, 按照 $|x|$ 与 y 的大小, 可能有以下几种情况:

(a) $|x| = y$, 此时有 3种可能:

$z > |x| = y$, $|x| = y > z$, $z = |x| = y$

(b) $|x| > y$, 此时有 5种可能:

$|x| > y > z$, $z > |x| > y$, $|x| > z > y$, $|x| > y = z$, $|x| = z > y$

(c) $|x| < y$, 此时有 5种可能:

$z > y > |x|$, $y > z > |x|$, $y = z > |x|$, $y > |x| > z$, $y > |x| = z$

A $z > |x| = y$

$-1 = x^y + y^z + z = -y^y + y^z + z > z > 3$

B $|x| = y > z$

$-1 = x^y + y^z + z = -y^y + y^z + z$

$= y^z(1 - y^{y-z}) + z < -y + z$

即是 $y - 1 < z < y$, 由于 y, z 是整数, 所以无解。

C $z = |x| = y$

$-1 = x^y + y^z + z = -y^y + y^y + y = y$

D $|x| > y > z$

$-1 = x^y + y^z + z = -|x|^y + y^z + z$

$< -|x|^y + |x|^z + z < -|x| + z$

由于 $|x|$ 是整数, 所以无解。

E $z > |x| > y$

$z + 1 < z^y - y^z = (z^{\frac{1}{z}})^{yz} - (y^{\frac{1}{y}})^{yz} = (z^{\frac{1}{z}} - y^{\frac{1}{y}})[(z^{\frac{1}{z}})^{yz-1} + \cdots + (y^{\frac{1}{y}})^{yz-1}]$ 由于当 $k \geqslant 3$ 时, $\{k^{\frac{1}{k}}\}$ 是减函数, 故 $z^{\frac{1}{z}} - y^{\frac{1}{y}} < 0$, 即是 $z + 1 < 0$, 矛盾。

F $|x| > y = z$

$y + 1 = |x|^y - y^y = (|x| - y)$

$(|x|^{y-1} + \cdots + y^{y-1}) > y^{y-1} > y + 1$

G $|x| = z > y$

$z + 1 = |x|^y - y^z = (z^{\frac{1}{z}} - y^{\frac{1}{y}}) \cdot [(z^{\frac{1}{z}})^{yz-1} + \cdots + (y^{\frac{1}{y}})^{yz-1}]$, $z^{\frac{1}{z}} - y^{\frac{1}{y}} < 0$, 即是 $z + 1 < 0$, 矛盾。

H $z > y > |x|$

$0 < z + 1 = |x|^y - y^z < y^y - y^z < 0$

I $y = z > |x|$

$0 < y + 1 = |x|^y - y^y < 0$, 矛盾。

J $y > |x| = z$

$z + 1 = |x|^y - y^z$ 可以验证 $y = 3$ 时方程(4)无解, 因此 $y \geqslant 5$ 且 y 是奇数。

以下用数学归纳法证明当 $y > |x| = z$ 时, $|x|^y - y^z > z + 1$

当 $|x| = z = 2$ 时, 由 $y \geqslant 5$ 得 $2^y - y^2 > 3 = 2 + 1$, 命题成立。

假设 $|x| = z = k < y$ 时命题成立, 即 $k^y - y^k > k + 1$,

当 $|x| = z = k + 1 < y$ 时, $|x|^y - y^z = (k+1)^y - y^{k+1} = (k+1)^y - k^y - (y^{k+1} - y^k) + k^y - y^k > k^y(C_y^1 k^{y-1} + \cdots + C_y^{y-1} k) - y^k(y - 1) + k + 1 > y^k(y - y + 1) + k + 1 > k + 2$ 因此当 $y = z > |x|$, 方程(4)无解。

$|x| > z > y$, $y > z > |x|$, $y > |x| > z$ 这 3种情况需要进一步研究。

② x, y, z, w 中有两个为负数。设 $x < 0$, $y < 0$, $z > 0$, $w > 0$, $y^z + z^w = -\frac{1}{x^{-y}} - \frac{1}{w^{-x}} = -\frac{w^{-x} + x^{-y}}{x^{-y}w^{-x}}$ 若 y 为偶数 $\frac{(x^{-y} + w^{-x})^2}{4} \leqslant x^{-y}w^{-x} \leqslant x^{-y} + w^{-x}$, 且 $x^{-y}w^{-x} \mid x^{-y} + w^{-x}$, 于是得到 $x^{-y} = 1$, $w^{-x} = 1$ 或 $x^{-y} = 2$, $w^{-x} = 2$ 对于 $x^{-y} = 1$, $w^{-x} = 1$ 时, 有 $x = -1$, $w = 1$, 此时 $y^z + z = -2$, 得到 z 为偶数, 此时左端 > 0, 右端 < 0。

对于 $x^{-y} = 2$, $w^{-x} = 2$ 这种情况由于 y 为偶数, 也不可能同时成立。

若 y 为奇数

$-w^{-x}|x^{-y}| = w^{-x}(1 - |x^{-y}|) - |x^{-y}| < 0$

而 $x^{-y}w^{-x} \mid x^{-y} + w^{-x}$, 得

$x^y + w^x = 0$, $y^z + z^w = 0$

(a) $w = y$ 即 $x^y + y^x = 0$, $y^z + z^y = 0$, 只有解 $(-2, 4, 2, 4)$, $(-k, -k, k, k)$, k 为任意正奇数, 由于 $y < 0$, 因而方程(2)的解为 $(-k, -k, k, k)$, k 为任意正奇数。

(b) $w < y$, 此时有 3种可能:

$x < w < y$, $w < x < y$, $w < y < x$

A $x < w < y$

$0 = w^x - x^y < y^x - x^y = (y^{\frac{1}{y}} - x^{\frac{1}{x}}) \cdot [(y^{\frac{1}{y}})^{xy-1} + (y^{\frac{1}{y}})^{xy-2}x^{\frac{1}{x}} + \cdots + (x^{\frac{1}{x}})^{xy-1}] < 0$, 矛盾。

B $w < x < y$

$0 = w^x - x^y < x^x - x^y < x^y - x^y = 0$

C $w < y < x$

$x^y + w^x = 0$, $y^z + z^w = 0$, 则只可能是 $z < w < y < x$ 这种情况, 于是 $\exists$ 整数 m_1、$m_2 \geqslant 2$ 使得

$|y| = z^{m_1}$, $|x| = w^{m_2}$, $m_1 z^{m_2} = m_2 z^{m_1}$

如果 $m_1 \leqslant m_2$ 时, 显然等式不成立。

如果 $m_1 > m_2$ 时, 令 $m_1 = p_1 p_2 \cdots p_t$

$m_2 = (p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_r})^{m_2}$ $(1 \leqslant i_1, \cdots, i_r \leqslant t)$ (c) $w > y$, 此时有 3种可能:

A $y < w < x$

$0 = w^x - x^y > y^x - x^y = (y^{\frac{1}{y}} - x^{\frac{1}{x}}) \cdot [(y^{\frac{1}{y}})^{xy-1} + (y^{\frac{1}{y}})^{xy-2}x^{\frac{1}{x}} + \cdots + (x^{\frac{1}{x}})^{xy-1}] > 0$, 矛盾。

B $y < x < w$

$0 = w^x - x^y > x^x - x^y > 0$, 矛盾。

C $x < y < w$

此时也有 3种可能: $x < y < z < w$, $x < z < y < w$, $z < x < y < w$ 这 3种情况的证明方法与 $z < w < y < x$ 的证

明方法一致, 可得到这 3种情况方程⑵也不可能有解。

③x, y, z, w 中有 3个为负数。设 $x < 0, y < 0, z < 0, w > 0$, $|z^w| = \left| -\frac{1}{x^{-y}} - \frac{1}{y^{-z}} - \frac{1}{w^{-x}} \right| \Rightarrow \leqslant 3$

(a)当 $|z^w| = 3$时, $z = -3, w = 1$, 上述等式变为 $\frac{1}{x^{-y}} + \frac{1}{y^3} = 2$

A 当 y为奇数时, 左端 < 0, 右端 > 0

B 当 y为偶数时, 左端 < 1, 右端 > 1

(b)当 $|z^w| = 2$时, $z = -2, w = 1$, 方程(2)变为 $\frac{1}{x^{-y}} = 1 - \frac{1}{y^2} = \frac{y^2 - 1}{y^2}$

A 当 y为奇数时, 左端 < 1, 右端 > 1

B 当 y为偶数时, 由于 $(y^2, y^2 - 1) = 1$, 得到 $y = -\sqrt{2}$, 不符

(c)当 $|z^w| = 1$时, $z = -1$

A 当 w为偶数时, $z^w = 1$

当 y为偶数时, 左端 > -1, 右端 $= -1$, 不可能。

当 y为奇数时, 如果 $x = -1$, 方程变为 $\frac{1}{w} + \frac{1}{y} = 0$, 所以 $w = -y$, 矛盾。

如果 $x \leqslant -2$, $w^{-x} = w^{|x|} > |x|$

$y = -1$时, 方程⑵变为 $\frac{1}{w^{-x}} + \frac{1}{x} = 0$,

$y \leqslant -3$时, $\frac{1}{x^{-y}} \geqslant -\frac{1}{8}, \frac{1}{y} \geqslant -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{w^{-x}} = -1 - (\frac{1}{x^{-y}} + \frac{1}{y}) \leqslant \frac{13}{24}$

B 当 w为偶数时, $z^w = -1$

当 y为奇数时, $\frac{1}{x^{-y}} < 0, \frac{1}{y} < 0, \frac{1}{w^{-x}} \leqslant 1$, 左端 $< 1 =$ 右端, 矛盾。

当 y为偶数时, 如果 $x = -1$, 方程(2)变为 $\frac{1}{w} + \frac{1}{y} = 0$, 所以 $w = -y$

如果 $x \leqslant -2$时, $\Rightarrow \frac{1}{w^{-x}} = 1 - (\frac{1}{x^{-y}} + \frac{1}{y}) > 1$, 不可能。

④x, y, z, w 中有 4个为负数。显然不可能全是偶数或奇数。

(a)如果有 1个偶数, 3个奇数。设 x, y, z为奇数, w为偶数

$|y|^{|z|}|z|^{|w|}|w|^{|x|} + |x|^{|y|}|z|^{|w|}|w|^{|x|} + |x|^{|y|}|y|^{|z|}|z|^{|w|} = |y|^{|z|}|z|^{|w|}(|x|^{|y|} + |w|^{|x|})$

此时左端 = 奇数, 右端 = 偶数, 矛盾。

(b)如果有 2个偶数, 两个奇数。设 x, y为奇数, z, w为偶数且 $z = -2^a b, w = -2^c d$ (b, d为奇数)

方程变为 $\Rightarrow 2^{c|x|} = 2^{ab \cdot 2^c} \Rightarrow 2^c \mid c$

(c) 3个偶数, 1个奇数的情况需要进一步研究。

参 考 文 献:

[1] 曹珍富. 丢翻图方程引论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1987.

[2] 刘燕妮, 郭晓艳. 一个丢翻图方程及其它的整数解[J]. 数学学报: 自然科学学报, 2010, 53(5): 853-855.

[3] 蒲义书, 陈露. 关于不定方程 $x^y + y^z + z^w + w^x = 4$的整数解的若干结果[J]. 安康师专学报: 自然科学学报, 2005, 17(6): 79-85.

[4] 赵才, 李正学. 关于不定方程 $x^y = y^x$ 的整数解[J]. 大庆高等专科学校学报: 自然科学学报, 2004, 24(4): 3-4.

[5] 柯召, 孙琦. 谈谈不定方程[M]. 上海: 上海教育出版社, 1980.

[6] 管训贵. 关于不定方程 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{xyzw} = 0$的一点注记[J]. 河北北方学院学报: 自然科学报, 2010, 26(4): 11-16.

[7] 高丽. 连分数求解一次不定方程[J]. 西北民族大学学报: 自然科学学报, 2009, 35(1): 1-3.

[8] 曹珍富. 不定方程及其应用中的若干问题[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1999.

A Diophantine Equation and Its Integer Solutions

HUO Meng-yuan

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract In this paper we use elementary methods, the divisible properties of the integers and the monotonicity of the sequence $\{k^{\frac{1}{k}}\}$ to study this problem, and solve it. That is, we shall prove that the Diophantine equation $x^y + y^z + z^w + w^x = 0$ has three general solutions. They are: $(x, y, z, w) = (a, 1, -2-a, 1), (1, b, 1, -2-b), (k, k, -k, -k)$, a, b is any integer and k is odd. But some special cases need further discussion.

Key words elementary methods; Diophantine equation; integer solutions