

# 一个新的混沌系统及其性质研究

高智中

(安徽科技学院理学院, 安徽 凤阳 233100)

**摘要:** 为了研究混沌系统的性质及其应用, 构造了一个新的三维连续自治混沌系统, 该系统含有三个参数, 一个非线性乘积项。通过理论分析和数值计算的方法详细地研究了系统的基本的动力学特性, 揭示了系统具有丰富的非线性动力学行为。

**关键词:** 分岔; 混沌; Lyapunov 指数; Poincaré 映射

**中图分类号:** O322

**文献标识码:** A

## 引言

自从 1963 年 Lorenz<sup>[1]</sup> 发现第一个混沌吸引子以来, 混沌理论得到迅速的发展。目前, 混沌已经渗透到包括生物学、医学、社会、经济、信息、控制等各个领域。近几年来, 国内外学者对混沌的生成进行了许多有成效的研究<sup>[2-9]</sup>。本文改造了 Spott-G 系统<sup>[10]</sup> 得到一个新的三维连续自治混沌系统, 分析了其混沌特性, 揭示了丰富的非线性动力学行为。

改造后的混沌系统的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + z \\ \dot{y} = -cxz - y \\ \dot{z} = -x - by \end{cases}$$

当  $a = 0.45$   $b = 2$   $c = 3$  时, 数值计算系统的三个 Lyapunov 指数为  $LE_1 = 0.0885$   $LE_2 = 0$   $LE_3 = -0.6326$  其中有一个 Lyapunov 指数大于零, 说明此时系统处于混沌状态, 此时, Lyapunov 维数为 2.1399。图 1 给出了各个状态变量的时间响应, 从这些响应图上也可以看出系统的状态值是无规律的在一定范围内变化的, 因而是混沌的。

## 1 系统模型及其基本动力学特性

### 1.1 新的混沌模型

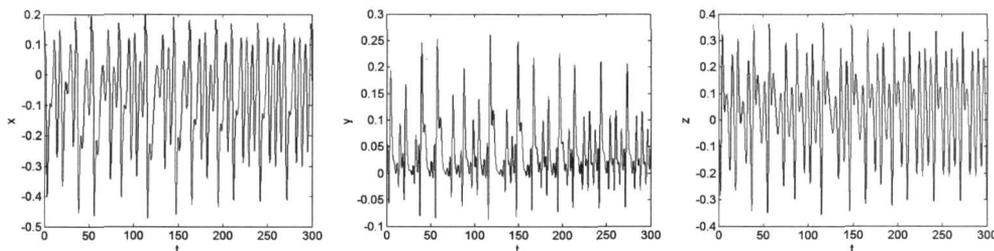


图 1 系统处于混沌时各个状态变量的时间响应图

### 1.2 平衡点及其稳定性

令系统的右端为零, 得系统的两个平衡点为  $S_1 = (0 \ 0 \ 0)$  和  $S_2 = (-1/abc \ 1/ab^2c \ 1/bc)$ 。将平衡点分别代入系统的 Jacobian 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ -cx & -1 & -cy \\ -1 & -b & 0 \end{pmatrix}。 S_1 = (0 \ 0 \ 0) 代入得其特$$

征方程为  $(\lambda + 1)(\lambda^2 - a\lambda + 1) = 0$  特征根为

收稿日期: 2010-12-27

基金项目: 安徽科技学院自然科学基金项目 (ZRC2010260)

作者简介: 高智中(1979-)男, 山西神池人, 助教, 硕士, 主要从事混沌反控制方面的研究。

$\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \frac{a \pm \sqrt{4 - a^2}i}{2}$ , 可知该平衡点为一不稳定的鞍焦点。将平衡点  $S_2 = (-1/abc, 1/ab^2c, 1/bc)$  代入得其特征方程为  $\lambda^3 + (1-a)\lambda^2 + (1-a+1/a)\lambda + 1 = 0$  根据 Routh-Hurwitz 判据<sup>[11]</sup>, 可知该平衡点也是不稳定的。

### 1.3 耗散性及吸引子的存在性

由于散度  $\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = a - 1 < 0$  所以系统是耗散的, 并以指数形式  $\frac{dV}{dt} = e^{(a-1)t}$  收敛。也就是一个初始体积为  $V(0)$  的体积元在时刻  $t$  时收缩为体积元

$V(t) = e^{(a-1)t}$ 。当  $t \rightarrow \infty$  时, 包含系统轨线的每个小体积元以指数速率  $a - 1$  收缩到零, 所有系统的轨线最终会被限制在一个体积为零的极限子集上, 其渐进运动将被固定在一个吸引子上, 这就说明了吸引子的存在性和有界性。图 2 给出了典型的混沌吸引子。从相图上可以看出系统的混沌吸引子具有复杂的折叠和拉伸轨线和复杂的几何形状, 系统的轨线是有界的, 其中的轨线不可能填满整个收缩区, 而是有一些空隙或空洞, 除了这些大的空洞, 还有不同层次的小的空隙或空洞, 这些大大小小的空隙或空洞的存在, 使吸引子具有无穷层次的自相似结构。

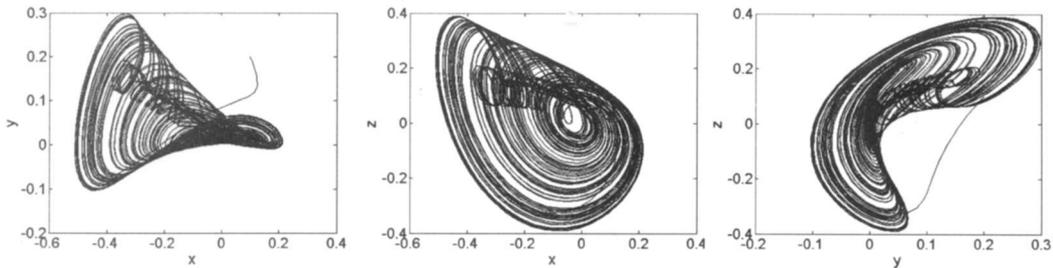


图 2 系统处于混沌时的典型吸引子

### 1.4 系统的 LE 图、分岔图和周期轨

分岔图和 Lyapunov 指数图都可以较直观地反映非线性动力系统随参数变化的动态特性。图 3 给出了固定参数  $b = 2, c = 3$  时, 系统的 Lyapunov 指数谱随  $a \in [0.2, 0.45]$  的变化和关于  $x$  的分岔图。从 Lyapunov 指数图和分岔图可以清楚的看到, 当  $a \in [0.2, 0.45]$  时, 该系统是由倍周期分岔通向混沌, 然后经阵发性离开混沌, 进入周期三, 再经倍周期分岔充分进入混沌, 并且在各个周期态, 参数  $a$  的取值一目了然。为了进一步说明系统中周期轨迹的特点, 图 4 画出了系统的不同的周期轨, 当  $a = 0.25, 0.3, 0.32, 0.37$  时, 系统分别处于周期一, 二, 四, 三状态。在混沌区域也有几处出现较窄的周期窗口, 周期窗口往往在系统的动力学行为演变过程中起着十分重要的作用, 会引发系统运行轨道状态突变或混沌危机等非线性物理现象。

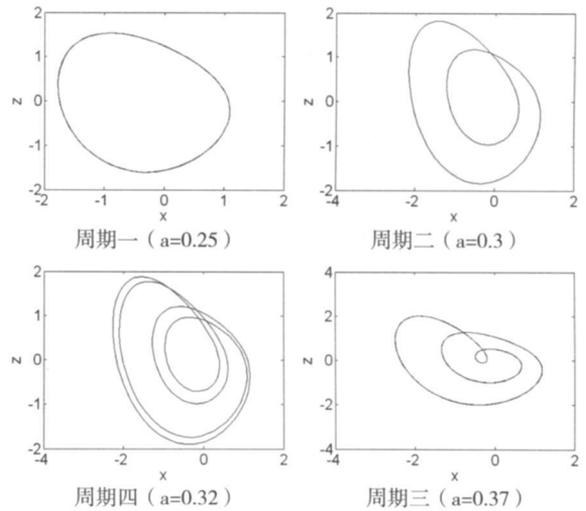


图 4 系统的不同周期轨

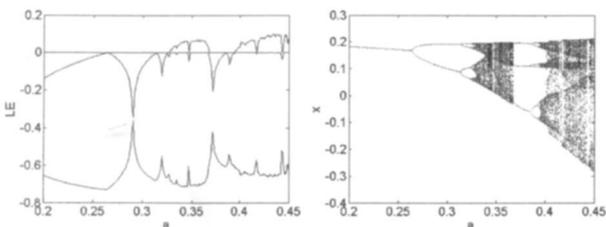


图 3 系统随 a 变化的 Lyapunov 指数图和分岔图

### 1.5 Poincaré 映射

Poincaré 映射是一种经典的分析动力系统的方法, 通过观察 Poincaré 截面上截点的情况可得到运动的特性。Poincaré 截面的选取要恰当, 此截面不能包含系统的轨线, 也不能与轨线相切。本文选取了相空间中穿过某一个平衡点的平面作为 Poincaré 截面。当 Poincaré 截面上有且仅有一个不动点或少数离散点时, 运动是周期的; 当 Poincaré 截面上是一封闭曲线时, 运动是准周期的; 当 Poincaré 截面上是沿一条直线段或一条曲线弧分

布着的点的集合, 运动是混沌的。图 5 给出了系统处于周期四 (a) 和混沌运动 (b) 的 Poincaré 截面图。

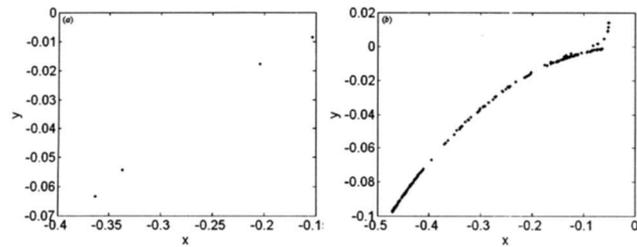


图 5 系统的 Poincaré 截面图

## 2 结 论

本文通过改造 Sprott-G 系统构造了一个新的三维自治混沌系统, 系统含有 3 个参数, 1 个非线性项。通过理论分析和数值计算的方法, 画出系统的时间响应图、相图、分岔图、Lyapunov 指数图、Poincaré 截面图, 结果表明该新混沌系统具有丰富的非线性动力学行为。

## 参 考 文 献:

[1] Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow [J]. Atmos Sci 1963, 20(2): 130-141

- [2] 王杰智, 陈增强, 袁著祉. 一个新的混沌系统及其性质研究 [J]. 物理学报, 2006, 55(8): 3956-3963
- [3] 刘明华, 肖开选, 杨建平. 一个新混沌系统的电路设计与实现 [J]. 江西师范大学学报, 2008, 32(1): 62-65
- [4] 陆安山, 周小珠. 一个新三维混沌系统及同步 [J]. 河南师范大学学报, 2008, 36(1): 65-68
- [5] 蔡国梁, 谭振梅, 周维怀, 等. 一个新的混沌系统的动力学分析及混沌控制 [J]. 物理学报, 2007, 56(11): 6230-6236
- [6] 许喆, 刘崇新, 杨韬. 一种新型混沌系统的分析及电路实现 [J]. 物理学报, 2010, 59(1): 131-139
- [7] 乔晓华, 包伯成. 新三维分段线性混沌系统 [J]. 电子科技大学学报, 2009, 38(4): 564-568
- [8] 赵静敏, 马跃超, 杨波. 基于非线性反馈方法的环链系统的混沌反控制 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(2): 40-43
- [9] 黄玮, 张化光. 一类多维连续线性系统的混沌反控制 [J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2004, 25(8): 727-730
- [10] Sprott J C. Some simple chaotic flows [J]. Physics Review E, 1994, 50(2): 647-650
- [11] 刘秉正, 彭建华. 非线性动力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004

## A New Chaotic System and Analysis of Its Properties

GAO Zhizhong

(College of Science, Anhui Science and Technology University, Fengyang 233100, China)

**Abstract** To study the characteristics of the chaotic systems and their applications, this paper reports a new three-dimensional continuous chaotic system. The new system contains three parameters and one quadratic cross-product terms. Basic dynamic properties of the system are studied by theoretical analysis and numerical simulation in detail to reveal the numerous nonlinear dynamic behaviors of the system.

**Key words** bifurcation; chaos; Lyapunov exponent; Poincaré map