第 24卷第 2期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol.24 No.2
2011年 4月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Apr. 2011
文章编号: 1673-1549(2011)02-0148-03

一族由前缀码生成的极大自由幺子半群

雷 宇, 汪莉萍, 胡华碧

(贵阳医学院基础医学院, 贵阳 550004)

摘 要: 设 X^* 是由字母表 X 生成的自由幺半群且 A 是 X^* 的非空子集, 如果 $A\cap AX^+=\Phi$, 则称 A 是前缀码。设 $\{B_1, B_2\}$ 是 X 的任意 2—划分, 令 $A=B_2\cup B_1(X^i\setminus B_1^i)\cup E$, $i=1, 2$, 其中 $E=B_1^{i+1}(B_1^0B_1\cup B_2B_1\cup B_2^2B_1\cup\cdots\cup B_2^{M-1}B_1\cup B_2^MX)$, $M\geqslant 0$, 文章证明了 A 是前缀码且幺半群 A^* 是自由幺半群 X^* 的极大自由幺子半群。

关键词: 语言图; 极大码; 极大自由幺子半群

中图分类号: O1562.7 文献标识码: A

1 基本概念

极大自由幺子半群作为一类特殊的自由幺子半群论, 引起人们广泛研究兴趣。文献[1]中赵平、李志敏给出了自由幺半群 A* 的两类极大自由幺子半群; 文献[2]中赵平、徐波对自由幺半群 A* 的两类极大自由幺子半群进行了推广; 文献[3-4]中赵平、徐波分别给出了自由幺半群 X* 的一族极大自由幺子半群; 文献[5]中胡华碧得到了自由幺半群的一族新的极大自由幺子半群。本文构造了自由幺半群的一族新的极大自由幺子半群。

令 A 是幺半群 S 的任意非空子集, 且 $A^*=\{1\}\cup A\cup A^2\cup\cdots\cup A^n\cup\cdots$, 显然 A^* 是半群 S 的子半群, 称 A^* 是由 A 生成的幺半群 S 的子半群。

定义 1 设 M 是幺半群 S 的任意非空子集, 若 M 满足: $\forall u_1u_2\cdots u_n=v_1v_2\cdots v_m$, $u_1, u_2, \cdots u_n, v_1, v_2, \cdots, v_m\in M\Rightarrow m=n$, $u_i=v_i$, $i=1, 2, \cdots, n$, 则称 M 是幺半群 S 的基, 显然 M^* 是 S 的幺子半群且 $1\notin M$。如果存在 S 的一个基 B, 使得 $S=B^*$, 则称 S 是自由幺半群。

令 X 是一个字母表, 称 X 上的任意有限字母的排列是一个字, 特别地, 用 1表示不含字母的空字. 令 X^* 是 X 上所有的字的集合, 定义 X^* 上的二元运算为任意两个字的连接运算, 则 X^* 是由 X 生成的自由幺半群, 我们称 $X^+=X^*\setminus\{1\}$ 是由 X 生成的自由半群。令 L 是 X^* 的非空子集, 称 L 是 X^* 的一个语言。如果 $L\cap LX^+=\Phi$, 则称 L 是前缀码。如果语言 L 是 X^* 的基, 则称 L 是码。如果码 L 满足: 对任意 $\omega\in X^+\setminus L$, 有 $L\cup\{\omega\}$ 不是码, 则称 L 是极大码。

定义 2 令 S 是 X^* 的任意自由子半群, 若 S 满足: 对 X^* 的任意自由子半群 T, $S\subseteq T$, 那么 $S=T$ 或 $T=X^*$, 则称 S 是 X^* 的极大自由子半群。

约定 对任意 $x\in X^*$, $x^0=1$, $\lg(x)$ 表示 x 所含 X 中字母的个数, 称为 x 的长度。对任意 $A\subseteq X^+$, 令 $\lg(A)=\max\{\lg(x): x\in A\}$, $T_A=\{x\in X^*: \exists y\in X^*$, 使 $xy\in A\}$, $T_A^C=X^*\setminus T_A$, 则显然 $A\subseteq T_A$ 且 $1\in T_A$。

本文未定义的术语及记法参见文献[5]。

2 结果及证明

引理 1 若 A 是前缀码, 则 A 是码。

证明 见文献[5]。

引理 2 设 X, B_1, B_2, C 同上, 则 C 是一个前缀码且 $X^*=C^*T_C$。

证明 由 C 的定义易验证 $C\cap CX^+=\Phi$, 即 C 是前缀码。要证明 $X^*=C^*T_C$。只需证明: $X^+\subseteq C^*T_C$。任意

收稿日期: 2010-12-08

基金项目: 贵州省科学技术基金项目(20103174)

作者简介: 雷宇(1973-), 女, 贵州贵阳人, 讲师, 主要从事信息及编码理论方面的研究。

取 $x \in X^+$, 我们对 x 的长度 $\lg(x)$ 进行归纳证明。

(1)当 $\lg(x)=1$, 由 C 及 T_C 的定义易知 $X \subseteq T_C$, 从而 $x \in X \subseteq T_C \subseteq C^* T_C$。

(2)假设对任意 $x \in X^+$, $\lg(x) \leqslant k$, 有 $x \in C^* T_C$。当 $\lg(x)=k+1$, 若 $x \in T_C$, 则显然有 $x \in T_C \subseteq C^* T_C$; 若 $x \in T_C^C$, 由 C、T_C 和 W_x 的定义知 $W_x \cap C \neq \Phi$, 即存在 $y \in C$, $z \in X^+$, 使 $x = yz$, 从而 $\lg(z) \leqslant k$。由归纳假设得 $z \in C^* T_C$, 于是 $x = yz \in CC^* T_C \subseteq C^* T_C$。综上, $X^* = C^* T_C$。

引理 3 {HT设 X, B_1, B_2, C 同上, 则 C 是一个极大码。

证明 由引理 1、2知 C 是一个码, 因此只需证明: $x \in X^+ \setminus C$, $C \cup \{x\}$ 不是码。由引理 2知 $x \in C^* T_C \setminus C$, 以下分两种情形讨论:

情形 1 若 $x \in T_C \setminus C$, 任意取 $y \in B_2 \subseteq C$, 由 $\lg(C) < \infty$ 知必存在 $k \geqslant 2$, 使 $xy^k \in T_C^C$。由 C、T_C 和 W_{xy^k} 的定义知 $W_{xy^k} \cap C \neq \Phi$, 于是存在 $1 \leqslant k_1 < k$, $xy^{k_1} \in C$。令 $\omega = (xy^{k_1}) = x\underbrace{y\cdots y}_{k\text{个}}$, 这说明字 ω 在 $C \cup \{x\}$ 中的表法不唯一, 从而 $C \cup \{x\}$ 不是码。

情形 2 若 $x \in C^+ T_C \setminus C$, 则存在 $y \in C^+$, $z \in T$, 使 $x = yz$. 若 $z \in C$, 则 x 在 $C \cup \{x\}$ 中的表法不唯一, 从而 $C \cup \{x\}$ 不是码; 若 $z \in T_C \setminus C$, 由情形 1知存在 $b \in B_2 \subseteq C$, $n \in \mathbf{N}$, $zb^n \in C$, 令 $\omega = y(zb^n) = x\underbrace{b\cdots b}_{n\text{个}}$, 这说明字 ω 在 $C \cup \{x\}$ 中的表法不唯一, 从而 $C \cup \{x\}$ 不是码。

综上所述, C 是一个极大码。

引理 4 设 D 是一个码, 则满足下列条件:

$\forall f \in X^*$, $D^* f \cap D^* \neq \Phi$, $fD^* \cap D^* \neq \Phi \Rightarrow f \in D^*$。

证明 见文献[6]及引理 4。

定理 4 设 X 是一个字母表, $\{B_1, B_2\}$ 是 X 的任意 2一划分, $A = B_2 \cup B_1(X^i \setminus B_1^i) \cup E$, 其中 $E = B_1^{i+1}(B_2^0 B_1 \cup B_2 B_1 \cup B_2^2 B_1 \cup \cdots \cup B_2^{M-1} B_1 \cup B_2^M X)$, $i = 1, 2$, $M \geqslant 0$, 则 A^* 是自由幺半群 X^* 的极大自由幺子半群。

(注 $M = 0$, $E = B_1^{N+1}(B_1^0 B_1 \cup B_2^0 X) = B_1^{N+1} X$; $M = 1$, $E = B_1^{N+1}(B_1^0 B_1 \cup B_2^1 X) = B_1^{N+1}(B_1 \cup B_2 X)$, $B_1^{i+1} B_1^0 B_1 = B_1^{i+2}$)

证明 要证明 A^* 是自由幺半群 X^* 的极大自由幺子半群, 即要证明: 对 X^* 的任意自由子半群 D^*, 其中 D 是码, 若 $A^* \subseteq D^*$, 那么 $A = D$ 或 $D = X$。现设 $D \neq X$, 因 $A \subseteq A^* \subseteq D^*$, 有 $B_2 \subseteq D$, 而由 $X = B_1 \cup B_2$ 知, $B_1 \setminus D \neq \Phi$。下面证明 $A \subseteq D$, 分以下步骤进行讨论:

(1) 若 $x^p \in D$, $x \in X$, 则 $x^q \notin D$, $p \neq q$。事实上, $x^q \in D$, 令 $\omega = x^q \cdots x^q = x^p \cdots x^p$, 这说明字 ω 在 D 中的表法不唯一, 与已知 D 是码矛盾。

(2) $B_1 \cap D = \Phi$。若存在 $x \in B_1 \cap D$, 则任意取 $b_1 \in B_1 \setminus D$, $b_2 \in B_2 \subseteq D$, 因 $(x^{i+1}) b_1 \in B_1^{i+2} \subseteq A \subseteq D^*$, $b_1(b_2^i) \in B_1(X^i \setminus B_1^i) \subseteq A \subseteq D^*$, 由引理 4可推出 $b_1 \in D$, 与 $b_1 \in B_1 \setminus D$ 矛盾。

(3) 对 $\forall b_1 \in B_1$, 有 $b_1 \in D$, $i = 1, 2$。事实上, 若存在 $b_1 \in B_1$, 使 $b_1^{i+2} \notin D$, 由 $b_1^{i+2} \in B_1^{i+2} \subseteq A \subseteq D^*$ 及(2)知, 存在 $2 \leqslant k < i+2$, 使 $b_1^k \in D$。由 $b_1^{i+2} \notin D$, $b_1^{i+2} \in B_1^{i+2} \subseteq A \subseteq D^*$, 可知存在 $d_1, \cdots, d_r \in D$, $r \geqslant 2$, 使 $b_1^{i+2} = d_1 \cdots d_r$。任意取 $b_2 \in B_2 \subseteq D$, 令 $\omega = d_1 \cdots d_r \underbrace{b_2 \cdots b_2}_{k-1\text{个}} = b_1^{i+2} \underbrace{b_2 \cdots b_2}_{k-1\text{个}} = b_1^k(b_1^{i+2-k} b_2^{k-1})$, 由 $b_1^{i+2-k} b_2^{k-1} \in B_1(X^i \setminus B_1^i) \subseteq A \subseteq D^*$, 这说明字 ω 在 D 中的表法不唯一, 与已知 D 是码矛盾。

(4) $B_1^{i+2} \subseteq D$, $i = 1, 2$。任意取 $x_1, x_2, \cdots, x_{i+2} \in B_1$, 因 $x_1 x_2^{i+1} \in B_1^{i+2} \subseteq A \subseteq D^*$ 及 $x_2^p \notin D$, $p \neq i+2$ (由(1)、(3)可得), 可推出 $x_1 x_2^{i+1} \in D$, 于是 $x_1 x_2 \notin D$, 否则, 任意取 $b_2 \in B_2 \subseteq D$, 令 $\omega = (x_1 x_2^{i+1}) b_2 = (x_1 x_2)(x_2^i b_2)$, 因 $x_2^i b_2 \in B_1(X^i \setminus B_1^i) \subseteq A \subseteq D^*$, 这说明字 ω 在 D 中的表法不唯一, 与 D 是码矛盾。当 $i = 1$ 时, 因 $x_1 x_2 x_3 \in B_1^3 \subseteq A \subseteq D^*$ 及 x_1, $x_1 x_2 \notin D$ 可推出 $x_1 x_2 x_3 \in D$, 即 $B_1^3 \subseteq D$; 当 $i = 2$ 时, 因 $x_1 x_2 x_3^2 \in B_1^4 \subseteq A \subseteq D^*$ 及 x_1, $x_1 x_2 \notin D$, $x_2^p \notin D$, $p \neq 4$, 可推出 $x_1 x_2 x_3^2 \in D$, 于是 $x_1 x_2 x_3 \notin D$, 否则, 任意取 $b_2 \in B_2$, 令 $\omega = (x_1 x_2 x_3^2) b_2 b_2 = (x_1 x_2 x_3)(x_3 b_2 b_2)$, 因 $x_3 b_2 b_2 \in B_1(X^2 \setminus B_1^2) \subseteq A \subseteq D^*$, 这说明字 ω 在 D 中的表法不唯一, 与 D 是码矛盾。因 $x_1 x_2 x_3 x_4 \in B_1^4 \subseteq A \subseteq D^*$ 及 x_1, $x_1 x_2$, $x_1 x_2 x_3 \notin D$, $x_2^p \notin D$, $p \neq 4$, 可推出 $x_1 x_2 x_3 x_4 \in D$, 即 $B_1^4 \subseteq D$。

(5) 当 $i = 2$ 时, $B_1 X \cap D = \Phi$。任意取 $\omega \in B_1 X$, 即存在 $b_1 \in B_1$, $x \in X$, 使 $\omega = b_1 x$。若 $x \in B_1$, 则由(4)的证明过程可知 $\omega = b_1 x \notin D$; 若 $x \in B_2$ 且 $\omega = b_1 x \in D$, 任意取 $b_2 \in B_2 \subseteq D$, 由 $b_1(x b_2)$, $(b_1 x) b_1 \in B_1(X^2 \setminus B_1^2) \subseteq A \subseteq D^*$, 由引理 4可推出 $b_1 \in D$, 与(2)矛盾, 即 $B_1 X \cap D = \Phi$。

(6) $B_1(X^i \setminus B_1^i) \subseteq D$, $i = 1, 2$。由 $B_1(X^i \setminus B_1^i) \subseteq A \subseteq D^*$ 及(1)(5), 可以直接推出 $B_1(X^i \setminus B_1^i) \subseteq D$。

(7) $E \subseteq D$。以下分 3种情形:

情形 1 $M=0$时, $E=B_1^{i+1}X$。由$B_1^{i+1}X\subseteq A\subseteq D^*$ 及 $B_1^p\notin D$, $p\neq i+2$ ((4)的过程中已证)可直接推出 $E=B_1^{i+1}X\subseteq D$。

情形 2 $M=1$时, $E=B_1^{i+1}(B_1\cup B_2X)$。断言 $B_1^{i+1}B_2\cap D=\Phi$, 若存在 $x\in B_1^{i+1}B_2\cap D$, 任意取 $b_1\in B_1$, 因 $xb_1\in B_1^{i+1}B_2X\subseteq E\subseteq A\subseteq D^*$ 及 $b_1(b_2^i)\in B_1(X^i\setminus B_1^i)\subseteq A\subseteq D^*$, 由引理 4可推出 $b_1\in D$, 与(2)矛盾。由 $B_1^{i+1}B_2X\subseteq E\subseteq A\subseteq D^*$ 及 $B_1^p\notin D$, $p\neq i+2$ ((4)的过程中已证而)可直接推出 $B_1^{i+1}B_2X\subseteq D$, 再由(4)可得 $E=B_1^{i+1}(B_1\cup B_2X)\subseteq D$。

情形 3 $M>1$时, 我们将证明 $B_1^{i+1}B_2^s\cap D=\Phi$, $1\leqslant s\leqslant M$。若存在 $x\in B_1^{i+1}B_2^s\cap D$, 任意取 $b_1\in B_1$, 因$xb_1\in B_1^{i+1}B_2^sB_1\subseteq E\subseteq A\subseteq D^*$ 及 $b_1(b_2^i)\in B_1(X^i\setminus B_1^i)\subseteq A\subseteq D^*$, 由引理 4可推出 $b_1\in D$, 与(2)矛盾。再由 $B_1^{i+1}B_2^sB_1$, $B_1^{i+1}B_2^MX\subseteq E\subseteq A\subseteq D^*$ 及$B_1^p\notin D$, $p\neq i+2$, 可直接推出 $B_1^{i+1}B_2^sB_1$, $B_1^{i+1}B_2^MX\subseteq D$, 从而由(4)可得 $E\subseteq D$。

综上所述, $A\subseteq D$, 由引理 3可得, $A=D$。定理到此得证。

参考文献:

[1] 赵平,李志敏,自由幺半群 A* 的两类极大自由幺子半群[J]. 贵州师范大学学报:自然科学版, 2002, 20(3): 78-80.

[2] 赵平,徐波.自由幺半群 X* 的两类极大自由幺子半群的推广[J]. 贵州师范大学学报 2006, 24(2): 82-84.

[3] 徐波,自由幺半群的一族极大自由幺子半群[J]. 贵州师范大学学报:自然科学版, 2007, 25(2): 68-70.

[4] 赵平,徐波.自由幺半群 X* 的一族极大自由幺子半群[J]. 贵州科学, 2007, 25(4): 32-34.

[5] Shyr H J. Free Monoids And Languages[M]. Taichung: HonMin Book Company, 2001.

[6] 胡华碧.半群 X^* 的一族极大自由幺子半群[J]. 重庆文理学院学报:自然科学版, 2009, 28(1): 29-31.

A Family Maximal Free Monoid Generated by Prefix Code

LEI Yu, WANG Li-Ping, HU hua-bi

(Basic Medical College, Guiyang Medical University, Guiyang 550004, China)

Abstract Let X^* be the free monoid generated by an alphabet X, and let A be nonempty subset of X^*. Let $\{B_1, B_2\}$ be an arbitrary two-partition on X, and let $A=B_2\cup B_1(X^i\setminus B_1^i)\cup E$, $i=1,2$, where $E=B_1^{i+1}(B_1^0B_1\cup B_2B_1\cup B_2^2B_1\cup\cdots\cup B_2^{M-1}B_1\cup B_2^MX)$, $M\geqslant 0$. In this paper, we showed that A be a prefix code and monoid A^* be maximal free submonoids of the free monoid X^*.

Key words language diagram; maximal code; maximal free submonoid