第 24卷第 2期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol.24 No.2
2011年 4月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering (Natural Science Edition) Apr. 2011
文章编号: 1673-1549(2011)02-0145-03

二阶中立型时滞差分方程的振动性与正解存在性

欧阳瑞[1], 陈春华[2]

(1.周口师范学院数学系, 河南 周口 466000; 2.周口师范学院化学系, 河南 周口 466000)

摘 要: 文章在已有文献的基础上, 利用反证法和构造序列的方法, 研究了一类二阶中立型时滞差分方程的振动性与正解存在性, 得到了此类方程振动与非振动的几个充分条件, 推广并改进了已有文献中关于此类振动性的结论, 丰富了这类方程的研究结果, 从而具有更广泛的应用性。

关键词: 中立型差分方程; 振动性; 正解存在性

中图分类号: O175.7 文献标识码: A

引 言

随着计算机科学、生物数学及边缘科学的不断发展, 在科学研究和社会实践中提出了很多由时滞差分方程描述的具体数学模型, 例如在生物学中有着广泛应用的著名的 Logistic方程

$$x'(t) = rx(t)\left(1-\frac{x(t)}{k}\right)$$

特别是形如

$$\Delta^m(x(n) - bx(n-\tau)) + q(n)x(n-\sigma) = 0$$

形式的中立型差分方程, 这类方程在生物种群动力学、经济学及高速计算机电路的无损传输等问题中有着重要作用, 因而对时滞差分方程定性理论的研究吸引了大批学者的广泛兴趣和高度关注[1-7]。申建华在文献[6]中研究了较一般的方程 $\Delta^2(x(n) - c(n)x(n-m)) - p(n)x(n-k) = 0$解的振动性, 其中 $c(n)\geqslant 0, p(n) > 0, m, k, n_0$是给定的非负整数, 且 $m\geqslant 1$, 得到了方程振动的几个充分性条件, 推广和改进了文献[5]的结果; 韩振来、郭书荣在文献[7]中研究了带多个变滞量的二阶中立型线性时滞差分方程

$$\Delta^2\left[x(n) + \sum_{i=1}^{m_1}p_i(n)x(n-k_i)\right] + q(n)\prod_{j=1}^{m_2}[x(n-\sigma_j)]^{\alpha_j}\operatorname{sgn}x(n-\sigma_j) = 0$$

的最终正解的存在性, 并得出了其解振动的充分条件。

1 基本概念与引理

设 Z为整数集, $a, b\in Z(a<b)$, 记 $N(a, b) = \{a, a+1, a+2, \cdots, b\}$, $N(a) = \{a, a+1, a+2, \cdots\}$, $N = N(0)$

考虑二阶中立型时滞差分方程

$$\Delta^2\left[x(n) + \sum_{i=1}^{m_1}p_i(n)x(n-k_i)\right] + q(n)\prod_{j=1}^{m_2}[x(n-\sigma_j)]^{\alpha}\operatorname{sgn}x(n-\sigma_j) = 0 \tag{1}$$

这里 $\{p_i(n)\}$, $\{q(n)\}$均为非负实数序列, k_i, σ_j, α_j $(i\in(1, m_1), j\in(1, m_2))$均为非负正整数, Δ为向前差分算子, 且 $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$。

实序列 $\{x(n)\}$称为方程(1)的一个解, 若当 $n\geqslant 0$时, 此序列的各项满足方程(1)。若当 n充分大时, 有 $x_n > 0$, 称其为方程(1)的最终正解。

方程(1)的解 $x(n)$称为振动的, 如果它既不最终为正, 也不最终为负。否则, 就称为非振动的。方程(1)称为振动的, 如果方程(1)的所有解都是振动的。

引理 1 设 $x(n)$是方程(1)的一个最终正解, 令

$$z(n) = x(n) + \sum_{i=1}^{m_1}p_i(n)x(n-k_i) \tag{2}$$

则存在一个正数 n_0, 对 $n\geqslant n_0$, 最终有

$$\Delta z(n)\geqslant 0, \ z(n) > 0.$$

证明 因 $x(n)$最终为正, 所以存在充分大的自然数 $n_1 > n_0$, 使得当 $n > n_1$时, 有

收稿日期: 2011-01-23
基金项目: 周口师范学院青年基金项目(201027A)
作者简介: 欧阳瑞(1979-), 男, 河南许昌人, 讲师, 硕士, 主要从事差分方程振动性方面的研究。

$$x(n)>0,\ x(n-\sigma_j)>0,\ (j\in(1,m_2))$$

由方程(1)和(2)式可得

$$\Delta^2 z(n)+q(n)\prod_{j=1}^{m_2}[x(n-\sigma_j)]^{\alpha_j}\operatorname{sgn}x(n-\sigma_j)=0$$

进而有

$$\Delta^2 z(n)=-q(n)\prod_{j=1}^{m_2}[x(n-\sigma_j)]^{\alpha_j}\operatorname{sgn}x(n-\sigma_j)\leqslant 0 \quad (3)$$

由(2)式知 $z(n)\geqslant x(n)>0$,则对 $n>n_1$,有 $\Delta z(n)>0$。否则存在一个 n_2,当 $n_2>n_0$时,有 $\Delta z(n_2)=-c$(其中 c为正),由(3)式可知 $\{\Delta z(n)\}$是不增函数,则有

$$\Delta z(n)\leqslant\Delta z(n_2)=-c,\ n>n_2$$

对上式两边从 n_2到 $n-1$求和,得

$$z(n)\leqslant z(n_2)-(n-n_2)c$$

所以有 $\lim\limits_{n\to+\infty}z(n)=-\infty$,这与 $z(n)>0$矛盾。所以假设不成立,故 $\Delta z(n)>0$。证毕。

2 主要结论与证明

定理 1 设方程(1)满足条件

(1) $\sum\limits_{j=1}^{m_2}\alpha_j$为奇数;

(2) $0\leqslant\sup\limits_n\sum\limits_{i=1}^{m_1}p_i(n)<1$,且存在 n_0,当 $n>n_0$时,有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\sum\limits_{t=n_0}^{n}(\prod\limits_{j=1}^{m_2}[1-\sum\limits_{i=1}^{m_1}p_i(t-\sigma_j)]^{\alpha_j})q(t)=+\infty$则方程(1)所有解振动。

证明 用反证法证明。

设方程(1)存在一个最终有界正解 $x(n)$,则一定存在一个正整数 n_0,使得当 $n\geqslant n_0$时有 $x(n-k_i)>0$,$x(n-\sigma_j)>0$,$(i\in(1,m_1),j\in(1,m_2))$

由引理 1知

$$\Delta^2 z(n)\leqslant 0,\ \Delta z(n)>0$$

$$z(n)>0,\ n\geqslant n_0$$

所以存在 $c>0$,使得

$$z(n-\sigma_j)=x(n-\sigma_j)+\sum_{i=1}^{m_1}p_i(n-\sigma_j)x(n-\sigma_j-k_i)\geqslant c>0,\ n\geqslant n_0$$

记

$$f(x(n))=\prod_{j=1}^{m_2}[x(n-\sigma_j)]^{\alpha_j}$$

由 $x(n)$有界知 $z(n)$有界,那么一定存在正常数 m和M,使得对任意的 $n\geqslant n_0$,都有

$$m\leqslant z(n-\sigma_j)\leqslant M,\ (j\in(1,m_2))$$

从而可知存在一个正常数N,使得

$$f(z(n))=\prod_{j=1}^{m_2}[z(n-\sigma_j)]^{\alpha_j}\geqslant N,\ n\geqslant n_0 \quad (4)$$

由(2)式知

$$z(n-\sigma_j)=x(n-\sigma_j)+\sum_{i=1}^{m_1}p_i(n-\sigma_j)x(n-\sigma_j-k_i) \quad (5)$$

$$z(n)\geqslant x(n)>0$$

进而有

$$z(n-k_i-\sigma_j)\geqslant x(n-k_i-\sigma_j)>0,$$
$$(i\in(1,m_1),j\in(1,m_2))$$

由 $\Delta z(n)>0$知 $z(n)$单调递增,所以有 $x(n-k_i-\sigma_j)\leqslant z(n-k_i-\sigma_j)\leqslant z(n_i-\sigma_j)$将(5)式带入方程(1)有

$$\Delta^2 z(n)+q(n)\prod_{j=1}^{m_2}[z(n-\sigma_j)-\sum_{i=1}^{m_1}p_i(n-\sigma_j)x(n-k_i-\sigma_j)]^{\alpha_j}=0$$

从而有

$$\Delta^2 z(n)+q(n)\prod_{j=1}^{m_2}[z(n-\sigma_j)-\sum_{i=1}^{m_1}p_i(n-\sigma_j)z(n-\sigma_j)]^{\alpha_j}\leqslant 0 \quad (6)$$

即

$$\Delta^2 z(n)+q(n)\prod_{j=1}^{m_2}[z(n-\sigma_j)]^{\alpha_j}\prod_{j=1}^{m_2}[1-\sum_{i=1}^{m_1}p_i(n-\sigma_j)]^{\alpha_j}\leqslant 0$$

再结合(4)式可得

$$\Delta^2 z(n)+Nq(n)\prod_{j=1}^{m_2}[1-\sum_{i=1}^{m_1}p_i(n-\sigma_j)]^{\alpha_j}\leqslant 0\ n\geqslant n_0$$

对上式两边从 n_0到 n求和,得

$$\Delta z(n+1)-\Delta z(n_0)\leqslant -N\sum_{t=n_0}^{n}(\prod_{j=1}^{m_2}[1-\sum_{i=1}^{m_1}p_i(t-\sigma_j)]^{\alpha_j})q(t)$$

所以

$$\sum_{t=n_0}^{n}(\prod_{j=1}^{m_2}[1-\sum_{i=1}^{m_1}p_i(t-\sigma_j)]^{\alpha})q(t)\leqslant\frac{1}{N}\Delta z(n_0)$$

这与条件 2矛盾,所以方程(1)没有最终正解。由条件 1知方程(1)也没有最终负解,所以方程(1)振动。证毕。

当 $m_2=1$时,方程(1)化为

$$\Delta^2[x(n)+\sum_{i=1}^{m}p_i(n)x(n-k_i)]+q(n)[x(n-\sigma)]^{\alpha}\operatorname{sgn}x(n-\sigma)=0 \quad (7)$$

有以下推论:

推论 假设方程(7)满足下面条件

(1) α为奇数;

(2) $0\leqslant\sup\limits_n\sum\limits_{i=1}^{m}p_i(n)<1$,且存在 n_0,当 $n>n_0$时,有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\sum\limits_{t=n_0}^{n}[1-\sum\limits_{i=1}^{m}p_i(t-\sigma)]^{\alpha}q(t)=+\infty$,则方程(7)的所有解振动。

定理 2 假设方程(1)满足下面条件

(1)若 $p_i(n)=p_i\geqslant 0$,$(i\in(1,m_1))$

(2) $\sum\limits_{j=1}^{m_2}\alpha_j>1$;

(3)存在一个正常数 c和 n_3,当 $n>n_3$时,使得 $\sum\limits_{n=n_3}^{N}cq(n)=+\infty$,则方程(1)中的差分算子 Δ是振动

的。

证明　设方程(1)存在一个最终正解 $x(n)$, 使得

$$x(n) > 0, \text{且} \Delta x(n) > 0 \tag{8}$$

或

$$x(n) > 0, \text{且} \Delta x(n) < 0 \tag{9}$$

下证(8)式与(9)式均不成立。

首先设(8)式成立, 则 $\{x(n)\}$ 单调递增, 令

$$z(n) = x(n) + \sum_{i=1}^{m_1} p_i(n)x(n-k_i),$$

$$y(n) = \frac{\Delta z(n)}{x(n-\sigma)}$$

其中 $\sigma = \max_{1\leqslant j\leqslant m_2}(\sigma_j) < +\infty$。由 $x(n) > 0$知 $x(n-\sigma) > 0$, 所以一定存在一个常数 $c > 0$, 使得 $x(n-\sigma) > c$, 又因为 $\Delta z(n) \geqslant 0$, 所以 $y(n) \geqslant 0$。

因此

$$\Delta y(n) = \frac{x(n-\sigma)\Delta^2 z(n) - \Delta z(n)\Delta x(n-\sigma)}{x(n-\sigma)x(n-\sigma+1)}$$

$$\leqslant \frac{\Delta^2 z(n)}{x(n-\sigma)} \leqslant -\frac{q(n)\prod_{j=1}^{m}[x(n-\sigma_j)]^{\alpha_j}}{x(n-\sigma)}$$

$$\leqslant - q(n)x(n-\sigma)^{\sum_{j=1}^{m_2}\alpha_j - 1} \leqslant - q(n)c^{\sum_{j=1}^{m_2}\alpha_j - 1}$$

对上式两边从充分大的 n_1 到 N 求和得

$$y(N) - y(n_1) \leqslant - q(n)\sum_{n=n_1}^{N} c^{\sum_{j=1}^{m_2}\alpha_j - 1}$$

令 $N \to +\infty$, 得 $q(n)\sum_{n=n_1}^{+\infty} c^{\sum_{j=1}^{m_2}\alpha_j - 1} < y(n_1)$, 与条件(3)相矛盾。

其次, 设(9)式成立, 则 $\{x(n)\}$ 单调递减, 且 $\Delta z(n) < 0$, $z(n) > 0$, 对

$$\Delta^2 z(n) = - q(n)\prod_{j=1}^{m_2}[x(n-\sigma_j)]^{\alpha_j}$$

两边从 n_2 到 n ($n > n_2$)求和, 得

$$\Delta z(n) - \Delta z(n_2) = - \sum_{t=n_2}^{n} q(t)\prod_{j=1}^{m_2}[x(t-\sigma_j)]^{\alpha_j}$$

$$\leqslant - \sum_{t=n_2}^{n} c^{\sum_{j=1}^{m_2}\alpha_j - 1} q(i) < 0$$

从而 $\lim_{n\to+\infty} z(n) = -\infty$, 这与 $z(n) > 0$矛盾。

因此 $\Delta x(n) > 0$和 $\Delta x(n) < 0$都不成立, 也就是说 $\Delta x(n)$既不最终为正也不最终为负。所以方程(1)中的差分算子 Δ是振动的。证毕。

参考文献:

[1] Shen H J, Stavroulakis I P. Oscillation criteria for delay difference equation[J]. Electron J diffeqns, 2001(10): 1-15.

[2] Yu J S, Zhang B G, Qian X Z. Oscillation of delay difference equations with oscillating coefficients[J]. J Math Anal Appl, 1993(177): 432-444.

[3] Lalli B S, Zhang B G, Li J Z. On the Oscillation of Solutions and Existence of Positive Solutions of Neutral Difference Equations[J]. J Math Anal Appl, 1991, 158: 213-233.

[4] Lalli B S, Zhang B G. On Existence of Positive Solutions and Bounded Oscillation for Neutral Difference Equations[J]. J Math Anal Appl, 1992, 166: 272-287.

[5] 邓春红, 冯春华. 一类时滞差分方程正周期解的存在性[J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2009, 22(1): 1-4.

[6] 申建华. 具有变系数的二阶中立型时滞差分方程[J]. 数学研究, 1994, 27(2): 60-69.

[7] 韩振来, 郭书荣. 带有多个变滞量的二阶中立型差分方程振动性判据[J]. 数学的实践与认识, 2002, 32(1): 61-64.

On the Oscillation of Solutions and Existence of Positive Solutions of Second Order Neutral Delay Difference Equations

OUYANG Rui[1], *CHEN Chun-hua*[2]

(1. Department of Mathmatics, Zhoukou Normal University, Zhoukou 466000, China;
2. Department of Chemical, Zhoukou Normal University, Zhoukou 466000, China)

Abstract　The oscillation of solutions and existence of positive solutions of a kind of second order nertral delay differerce equations is studied in this paper, some sufficient conditions for oscillation of the equation are obtained by method of reduction to absurdity and construct serial. These results in the previous papers are expanded and improved. Accordingly, this paper has broader application.

Key words　netural difference equations; oscillation; existence of positive solutions