第 24卷第 1期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol 24 No. 1
2011年 2月　　Journal of Sichuan University of Science& Engineering(Natural Science Edition)　　Feb. 2011
文章编号: 1673-1549(2011)01-0029-03

交换环上一类代数的拟导子

李娜娜, 张荣娟

(中国矿业大学理学院, 江苏 徐州 221116)

摘　要: 设 R 为任意含幺交换环, $M_n(R)$ 为 R 上所有矩阵组成的结合 R - 代数。对于 $M_n(R)$ 上线性变换 φ, 若存在线性变换 φ' 使得对任意 $x, y \in M_n(R)$ 均有 $\varphi'(xy) = \varphi(x)y + x\varphi(y)$, 则称 φ 为 $M_n(R)$ 上的拟导子。本文定出了当 $n \geqslant 3$ 时 $M_n(R)$ 上任一拟导子的具体形式, 对导子的概念进行了推广。

关键词: 矩阵代数; 导子; 拟导子; 交(可)换环
中图分类号: O151　　文献标识码: A

引　言

Leger和 Luks在文献[1]中首次引入了李代数上拟导子的概念, 设 L 为李代数, 对于 $\varphi \in Hom(L, L)$, 若存在 $\varphi' \in Hom(L, L)$ 使得对任意的 $x, y \in L$ 均有 $\varphi'([x, y]) = [\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)]$, 则称 φ 为 L 上拟导子。且 Leger和 Luks完全决定了域上由权空间张成的一类李代数的所有拟导子。黄惠玲, 谭宜家等在文献[2]中决定了可换半环上上三角矩阵代数自同构的具体形式。文献[3-7]中给出了可换环上一类代数的导子和若当导子的具体形式。而李代数和结合代数之间密切关联, 故本文意欲把拟导子的概念移植到结合代数上, 定出 $n \geqslant 3$时可换环 R 上矩阵代数 $M_n(R)$ 的拟导子的具体形式, 从而把文献[1]的部分结果由域推广到环上, 对导子的概念进行了推广。

定义 1　设 R 为任意含幺交换环, $\mathcal{A}$为 R 上代数。φ 为 $\mathcal{A}$上线性映射, 若存在线性映射 $\varphi': \mathcal{A} \to \mathcal{A}$对任意的 $a, b \in \mathcal{A}$, 均有 $\varphi'(ab) = \varphi(a)b + a\varphi(b)$, 则称 φ为 $\mathcal{A}$ 上的拟导子。

显然, 若 φ是 $\mathcal{A}$上的导子, 则 φ一定是 $\mathcal{A}$上的拟导子, 可见拟导子是导子概念的推广。但反过来, 若 φ是 $\mathcal{A}$上的拟导子, 那么 φ是 $\mathcal{A}$上的导子吗?

例　恒等变换。取 $n \geqslant 3$, 定义映射如下: $\varphi: M_n(R) \to M_n(R)$, $X \mapsto X$. 取 $\varphi' = 2\varphi$, 则由拟导子的概念易得 φ 是一个拟导子, 但它不是导子。

1　$M_n(R)$ 的标准拟导子

首先介绍一下本文中将用到的一些记号。一般地, 设 R 为任意含幺交换环, 令 $n \geqslant 3$, 我们分别用 $M_n(R)$, $O_n(R)$, $D_n(R)$ 表示 R 上所有 $n \times n$矩阵, 所有主对角线全为 0的矩阵, 所有对角矩阵组成的代数, 对任意的 $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $E_{ij} \in M_n(R)$ 表示只有 (i, j) 分量是 1, 其余分量全为 0的 n 级方阵。对任意的 $x \in M_n(R)$, 可写 $X = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} a_{ij}E_{ij}$, 其中 $a_{ij} \in R$。我们将 $M_n(R)$ 上所有线性映射组成的集合记为 $gl(M)$, 所有拟导子组成的集合记为 $QDer(M)$, 所有导子组成的集合记为 $Der(M)$, 所有内导子组成的集合记为 $ad(M)$, 于是由拟导子定义得 $gl(M)$ 的子代数链: $ad(M) \subseteq Der(M) \subseteq QDer(M)$。

构造 $M_n(R)$ 的一些标准拟导子。

内导子: 若 $X \in M_n(R)$, 那么映射 $adX: M_n(R) \to M_n(R)$, $Y \mapsto [X, Y] = XY - YX$ 是 $M_n(R)$ 的一个导子, 称它为 X 诱导的内导子。

诱导的拟导子: 设 $a \in R$, 定义可逆的线性映射 $\psi: R \to R$, 称 ψ 对于诱导的拟导子是合适的, 如果对任意的 $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$, $a_{ii}, a_{ki}, a_{ik}, a_{kj} \in R$ 满足:

(1) $\psi(a_{ii}) = aa_{ii}$, $i = 1, 2 \cdots n$

收稿日期: 2010-11-10
基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金(2010LKSX05)
作者简介: 李娜娜(1984-), 女, 山东淄博人, 硕士, 主要从事代数及其应用方面的研究。

(2)当 $i\neq j$时,有

$\phi(a_{ik}a_{kj}) = \phi(a_{ik})a_{kj} + a_{ik}\phi(a_{kj}) - aa_{ik}a_{kj}$

(3) $\phi(a_{ik}a_{ki}) = \phi(a_{ik})a_{ki} + a_{ik}\phi(a_{ki}) - aa_{ik}a_{ki} = 0$

利用这样的 ϕ 定义映射 $\theta: M_n(R) \to M_n(R)$, $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}E_{ij} \mapsto \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\phi(a_{ij})E_{ij}$。

下面证明定义1的映射 θ为$M_n(R)$上拟导子。

证明 任取 $x = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}E_{ij} \in M_n(R)$, $y = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{ij}E_{ij} \in M_n(R)$, 其中 $a_{ij}, b_{ij} \in R$。显然对任意 $r, s\in R$, 有 $\theta(rs+sy) = r\theta(s) + s\theta(y)$。由于 $xy = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}E_{ij}$, 且 ϕ对于诱导的拟导子是合适的, 取 $\theta' = \theta + \varphi(a)$ 其中 $\varphi(a)$为$M_n(R)$上的纯量映射, 由诱导的拟导子中的条件(2)和条件(3)可得:

$$\theta'(xy) = \theta(xy) + axy =$$

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}(\phi(a_{ik}b_{kj}) + aa_{ik}b_{kj})E_{ij} =$$

$$\sum_{1\leqslant i=j\leqslant n}\sum_{k=1}^{n} aa_{ik}b_{ki}E_{ii} + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}(\phi(a_{ik})b_{kj} + a_{ik}\phi(b_{kj}))E_{ij}$$

另一方面, 由诱导的拟导子中的条件(3)易知:

$$\theta(x)y + x\theta(y) =$$

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}(\phi(a_{ik})b_{kj} + a_{ik}\phi(b_{kj}))E_{ij} =$$

$$\sum_{1\leqslant i=j\leqslant n}\sum_{k=1}^{n} aa_{ik}b_{ki}E_{ii} + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}(\phi(a_{ik})b_{kj} + a_{ik}\phi(b_{kj}))E_{ij}$$

因此 $\theta'(xy) = \theta(x)y + x\theta(y)$。所以 θ是$M_n(R)$上的一个拟导子。

利用上面构造的这些标准拟导子, 可以刻划$M_n(R)$的任意拟导子。

定理1 设R为任意含幺交换环, 令 $n\geqslant 3$, $M_n(R)$为R上所有矩阵组成的代数。φ为$M_n(R)$上的线性变换, 则 φ是$M_n(R)$的拟导子, 当且仅当 $\varphi = adD + \theta$, $D\in O_n(R)$, 其中adD与 θ分别表示$M_n(R)$上的内导子与诱导的拟导子。

2 引理及定理的证明

引理1 令$M = RE = \{rE \mid r\in R\}$。若 φ是$M_n(R)$的拟导子, 则 $\varphi(M)\subseteq M$。

证明 设 φ是 $M_n(R)$ 的拟导子, 对任意 $A\in M_n(R)$, 由拟导子的定义可知:

$$\varphi'(A) = \varphi'(AE) = \varphi(A) + A\varphi(E)$$

$$\varphi'(A) = \varphi'(EA) = \varphi(E)A + \varphi(A)$$

比较上面两式可得: $A\varphi(E) = \varphi(E)A$。由$A$的任意性可知, $\varphi(E)\in M$, 从而 $\varphi(M)\subseteq M$。

引理2 若 φ是$M_n(R)$的拟导子, 则存在 $a\in R$, 使得对任意 $1\leqslant i,j\leqslant n$均有 $\varphi'(E_{ij}) = \varphi(E_{ij}) + aE_{ij}$。

证明 对任意 $1\leqslant i,j\leqslant n$, 由于$E\cdot E_{ij} = E_{ij}$, 可得 $\varphi'(E_{ij}) = \varphi(E)E_{ij} + \varphi(E_{ij})$。由引理1知 $\varphi(E)\in RE$。故令 $\varphi(E) = aE$, $a\in R$, 于是 $\varphi'(E_{ij}) = \varphi(E) + aE_{ij}$。

定理1的证明, 设 φ是$M_n(R)$的任一拟导子。

第一步 存在$D\in O_n(R)$, 使得对任意 $1\leqslant i\leqslant n$, $a\in R$, 有 $(\varphi - adD)(E_{ii}) = aE_{ii}$。进而 $\varphi - adD$把对角矩阵变成对角矩阵。

对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$, 由等式$E_{ii} = E_{ii}$可知 $\varphi'(E_{ii}) = \varphi(E_{ii})E_{ii} + E_{ii}\varphi(E_{ii})$。由引理2知 $\varphi'(E_{ii}) = \varphi(E_{ii}) + aE_{ii}$。于是可得:

$$\varphi(E_{ii}) + aE_{ii} = \varphi(E_{ii})E_{ii} + E_{ii}\varphi(E_{ii}) \quad (1)$$

设 $\varphi(E_{11}) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^{(1)}E_{ij}\in M_n(R)$, 由(1)式可得:

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^{(1)}E_{ij} + aE_{11} = \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^{(1)}E_{ij}\right)\cdot E_{11} + E_{11}\cdot\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^{(1)}E_{ij}\right)$$

比较等式两端知 $a_{11}^{(1)} = a$, 当 $i\neq 1$且 $j\neq 1$时, $a_{ij}^{(1)} = 0$。故有 $\varphi(E_{11}) = aE_{11} + \sum_{j=2}^{n}(a_{1j}^{(1)}E_{1j} + a_{j1}^{(1)}E_{j1})$。若取 $x_1 = \sum_{j=2}^{n}(a_{1j}^{(1)}E_{1j} - a_{j1}^{(1)}E_{j1})\in O_n(R)$, 则有 $(\varphi - adx_1)(E_{11}) = aE_{11}$, 记 $\varphi - adx_1 = \varphi_1$, 于是有 $\varphi_1(E_{11}) = aE_{11}$。设 $\varphi_1(E_{22}) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^{(2)}E_{ij}$ 同理由(1)式可得:

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^{(2)}E_{ij} + aE_{22} = \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^{(2)}E_{ij}\right)\cdot E_{22} + E_{22}\cdot\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^{(2)}E_{ij}\right)$$

比较等式两端可知 $a_{22}^{(2)} = a$, 当 $i\neq 1$且 $j\neq 1$时, $a_{ij}^{(2)} = 0$。将 φ_1 作用在等式 $E_{11}E_{22} + E_{22}E_{11} = 0$上可知 $E_{11}\varphi_1(E_{22}) + \varphi_1(E_{22})E_{11} = 0$, 进一步整理可知 $a_{12}^{(2)} = a_{21}^{(2)} = 0$。令 $x_2 = \sum_{j=3}^{n}(a_{j2}^{(2)}E_{j2} - a_{2j}^{(2)}E_{2j})$ 则有 $(\varphi_1 - adx_2)(E_{22}) = aE_{22}$, 我们记 $\varphi_1 - adx_2 = \varphi_2$, 于是易知 $\varphi_2 = \varphi - adx_1 - adx_2$分别将$E_{11}$, E_{22}映射为 aE_{11}与 aE_{22}。设 $\varphi_{k-1} = \varphi - \sum_{i=1}^{k-1} adx_i$ 将 E_{ii} 映为 aE_{ii}, $1\leqslant i\leqslant k-1$。$\varphi_{k-1}(E_{kk}) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^{(k)}E_{ij}\in M_n(R)$ 同理由(1)式知 $a_{kk}^{(k)} = a$, 当 $i\neq k$且 $j\neq k$时 $a_{ij}^{(k)} = 0$, 由引理2将 φ'_{k-1}作用在等式 $E_{ii}\cdot E_{kk} + E_{kk}E_{ii} = 0$上, 其中 $i = 1, 2, \cdots, k-1$, 可得:

$$\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^{(k)}E_{ij}\right)\cdot E_{ii} + E_{ii}\cdot\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^{(k)}E_{ij}\right) = 0$$

由此可知 $a_{ik}^{(k)} = a_{ki}^{(k)} = 0$, $i = 1, 2, \cdots, k-1$, 选取 $x_k = \sum_{i=k+1}^{n}(a_{ik}^{(k)}E_{ik} - a_{ki}^{(k)}E_{ki})\in O_n(R)$。则 $\varphi_{k-1} - adx_k$ 把 E_{kk}映

成 aE_{kk}, 同时把 E_{ii}, $i = 1, 2, \cdots, k-1$映为 aE_{ii}。由归纳法, 可选取 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1} \in O_n(R)$, 使得 $\varphi - \sum_{i=1}^{n-1} adx_i$ 把 E_{kk}, $k = 1, 2, \cdots, n-1$映为 aE_{kk}。显然 $\varphi - \sum_{i=1}^{n-1} adx_i$ 把 E_{nn} 映为 aE_{nn}。记 $D = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \in O_n(R)$, 则 $(\varphi - adxD)(E_{kk}) = aE_{kk}$, $k = 1, 2, \cdots, n$。设 $\varphi - adxD = \varphi_1$, 则 $\varphi_1(E_{kk}) = aE_{kk}$, $k = 1, 2, \cdots, n$。进一步易知对任意 $A \in D_n(R)$ 均有 $\varphi_1(A) = aA$, 故而 φ_1 把对角矩阵变成对角矩阵。

第二步 对任意的 $k \neq l$, $\varphi_1(RE_{kl}) \subseteq RE_{kl} + RE_{lk}$, 设 $k \neq l$, 令 $b_{kl} \in R$为 R中一个确定的元素, 假设 $\varphi_1(b_{kl}E_{kl}) = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} a_{ij}E_{ij} \subseteq M_n(R)$, 则由引理 2将 φ_1 作用在等式 $E_{kk}(b_{kl}E_{kl}) + (b_{kl}E_{kl})E_{kk} = b_{kl}E_{kl}$ 上可得:

$$E_{kk}\left(\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} a_{ij}E_{ij}\right) + \left(\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} a_{ij}E_{ij}\right)E_{kk} = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} a_{ij}E_{ij}$$

于是, 当 $i \neq k$ 且 $j \neq k$时, $a_{kk} = a_{ij} = 0$。同理当 $j \neq l$且 $i \neq l$时, $a_{ll} = a_{ij} = 0$。所以 $\varphi_1(b_{kl}E_{kl}) \subseteq RE_{kl} + RE_{lk}$。即有: $\varphi_1(RE_{kl}) \subseteq RE_{kl} + RE_{lk}$。

第三步 存在诱导的拟导子 θ使得 $\varphi_1 = \theta$。由第二步可知, 当 $i \neq j$时, $\varphi_1(a_{ij}E_{ij}) \subseteq RE_{ij} + RE_{ji}$。由此当 $i \neq j$时, 定义 R 到 R 的映射 φ满足条件 $\varphi_1(a_{ij}E_{ij}) = \varphi(a_{ij})E_{ij} + \varphi^{-1}(a_{ij})E_{ji}$; 当 $i = j$时, 定义 φ为 R上的纯量映射。对任意 i, j, k当 $i \neq j$时, 由引理 2将 φ_1作用在等式 $(a_{ik}E_{ik})(a_{kj}E_{kj}) + (a_{kj}E_{kj})(a_{ik}E_{ik}) = a_{ik}a_{kj}E_{ij}$ 上可得 $\varphi(a_{ik}a_{kj}) = \varphi(a_{ik})a_{kj} + a_{ik}\varphi(a_{kj}) - aa_{ik}a_{kj}$。当 $i = j \neq k$时, 由引理 2将 φ_1 作用在等式 $(a_{ik}E_{ik})(a_{ki}E_{ki}) + (a_{ki}E_{ki})(a_{ik}E_{ik}) = a_{ik}a_{ki}(E_{ii} + E_{kk})$上可得: $\phi(a_{ik}a_{ki}) = \phi(a_{ik})a_{ki} + a_{ik}\phi(a_{ki}) - aa_{ik}a_{ki} = 0$。当 $i = j = k$时, 显然该式成立。因此 φ对于诱导的拟导子是合适的。利用 φ定义诱导的拟导子 θ, 根据定义 1可得 $\varphi_1 = \theta$。因此 $\varphi = adD + \theta$, 其中 $D \in O_n(R)$。

参考文献:

[1] Leger G F, Luks E M. Generalized derivations of Lie algebras[J]. J Algebra, 2000, 228: 165-203.

[2] 黄惠玲, 谭宜家, 张国勇. 交换半环上三角矩阵代数的自同构[J]. 数学研究, 2007, 40(2): 202-206.

[3] 张丽红, 王登银, 张波. 可换环上一类矩阵李代数的导子及自同构[J]. 中国矿业大学学报, 2006, 35(5): 699-702.

[4] 张波, 王登银, 张丽红. 可换环上一类矩阵代数的导子及自同构[J]. 大学数学, 2006, 22(2): 36-40.

[5] 赵延霞, 姚瑞平, 王登银. 交换环上上三角矩阵代数的扩代数及其若当导子[J]. 系统科学与数学, 2008, 28(12): 1502-1508.

[6] Benkovic D. Jordan derivation and antiderivations on triangular matrices[J]. Liner Algebra Appl, 2005, 397: 235-244.

[7] Beidar K I, Bresar M, Chebotar M A. Jordan isomorphisms of triangular matrix algebras over a connected commutative ring[J]. Liner Algebra Appl, 2000, 312: 197-201.

Quasi-derivations of a Algebra over Commutative Ring

LI Na-na, ZHANG Rong-juan

(College of Sciences, China University of Mining & Technology, Xuzhou 221116, China)

Abstract Let R be an arbitrary commutative ring with identity. Denote by $M_n(R)$ the associative R-algebra over R consisting of all n by n matrices. An invertible linear transformation φ on $M_n(R)$ is called a quasi-derivation of it if there exists an invertible linear transformation φ' on $M_n(R)$ such that $\varphi'(xy) = \varphi(x)y + x\varphi(y)$ for $\forall x, y \in M_n(R)$. The aim of this paper is to give an explicit description on the quasi-derivations of $M_n(R)$ when $n \geqslant 3$. Generalizes the notion of derivation to a more general case.

Key words matrices algebra; derivation; quasi-derivation; commutative ring