

具常数投放率的食饵—捕食者系统定性分析

刘 皓, 张兆强, 刘启宽

(成都信息工程学院数学学院, 成都 610225)

摘 要: 对一类广义具常数投放率的食饵—捕食者两类种群模型的定性分析, 讨论了系统平衡点的稳定性, 用 *Poincare-Bendixson* 环域定理得到平衡点外存在稳定极限环的条件。同时对相应结论的生态学意义给予说明, 通过用计算机软件 *Maple* 进行图形绘制, 能够清晰了解轨线的走向和趋势, 从而证明了理论分析的正确性。

关键词: 平衡点; 全局稳定性; 极限环; *Maple* 软件

中图分类号: O174. 52

文献标识码: A

对于食饵—捕食系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) - P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -dy + Q(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

$$A_2 \left(\left(\frac{d}{ke}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, -\frac{be}{d} \left(\frac{d}{ke}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{ae}{d} \left(\frac{d}{ke}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{he}{d} \right)$$

当 $\left(\frac{d}{ke}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b}$ 时, 系统 (2) 仅有一个

的定性研究, 近年来有一些结果。本文在文献 [1-3] 的基础上, 研究了如下—类广义系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - bx) - kyx^{\alpha} + h \equiv P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = y(-d + kex^{\alpha}) \equiv Q(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

平衡点, 为 $A_1 \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b}, 0 \right)$ 。

定理 1 (1) 当 $\left(\frac{d}{ke}\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b}$ 时, A_1 为

鞍点, 且当 $(1 - \alpha)a \left(\frac{d}{ke}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + (\alpha - 2)b \left(\frac{d}{ke}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - ah > 0$

其中, a, b, k, d, e, h 均为正常数, $0 < \alpha < 1$ 。讨论系统平衡点的形态, 极限环的存在性以及系统的稳定性。

时, A_2 为不稳定(结)焦点; 当 $\frac{a}{2b} < \left(\frac{d}{ke}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ 时, A_2 为稳定焦(结)点。

基于生态意义, 仅在 $\Omega = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ 内考虑。 $a - bx$ 代表食饵种群的增长率; $k y^{\alpha}$ 代表每一个捕食者的捕食率, h 代表食饵投放率; d 代表捕食种群的自然死亡率; k 代表捕食者的转化率。

(2) 当 $\left(\frac{d}{ke}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b}$ 时, A_1 为稳定结点。

1 平衡点的性质

证明 由系统 (2) 知

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} = a - 2bx - \alpha kyx^{\alpha-1}$$

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -kx^{\alpha}$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \alpha keyx^{\alpha-1}$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} = -d + kex^{\alpha}$$

当 $\left(\frac{d}{ke}\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b}$ 时, 系统 (2) 有两个平

衡点, 分别为:

$$A_1 \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b}, 0 \right)$$

收稿日期: 2010-09-27

基金项目: 国家自然科学基金项目资助(11072204); 四川省应用基础研究计划资助项目(2010JY0079); 成都信息工程学院自然科学发展基金资助项目(CSRF200601)

作者简介: 刘皓(1985-), 男, 山东滕州人, 硕士生, 主要从事微分方程及其应用方面的研究。

记

$$H = \begin{Bmatrix} \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

对平衡点 $A_1(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b}, 0)$,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\sqrt{a^2 + 4bh}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -k(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b})^\alpha$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} = -d + ke(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b})^\alpha$$

则

$$DeH|_{A_1} = -\sqrt{a^2 + 4bh}(-d + ke(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b})^\alpha)$$

$$TH|_{A_1} = -\sqrt{a^2 + 4bh} - (d - ke(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b})^\alpha)$$

当 $(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} < \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b}$ 时, $DeH|_{A_1} < 0$ A_1 为鞍点。

当 $(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} > \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b}$ 时, $DeH|_{A_1} > 0$ 且 $TH|_{A_1} < 0$ A_1 为稳定结点。对平衡点 $A_2((\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}}, -\frac{be}{d}(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{ae}{d}(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{he}{d})$,

$$\frac{ae}{d}(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{he}{d}$$

则

$$DeH|_{A_2} = \alpha d[a - b(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} + h(\frac{d}{ke})^{-\frac{1}{\alpha}}]$$

$$TH|_{A_2} = -\alpha(a - b(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} + h(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}}) + (a - 2b(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}})$$

故当 $(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} < \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b}$ 且 $\frac{a}{2b} < (\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}}$ 时,

$DeH|_{A_2} > 0$ 且 $TH|_{A_2} < 0$ A_2 为稳定(结)焦点; 当

$(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} < \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b}$ 且 $-\alpha(a - b(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} +$

$h(\frac{d}{ke})^{-\frac{1}{\alpha}}) + (a - 2b(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}}) > 0$ 时, $DeH|_{A_2} > 0$ 且

$TH|_{A_2} > 0$ A_2 为不稳定(结)焦点。

定理 2 当 $(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} < \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b}$ 且 $\frac{a}{2b} < (\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}}$

时, 平衡点 A_2 为全局渐进稳定点。

证明 取 Dulac 函数: $B(x, y) = x^{-\alpha}y^\beta$, 则

$$D \equiv \frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = [(1 - \alpha)ax^{-\alpha} - b(2 - \alpha)x^{1-\alpha} - ahx^{-\alpha-1} + (\beta + 1)(ke - dx^{-\alpha})]y^\beta$$

记

$$\varphi(x) = (1 - \alpha)ax^{-\alpha} - b(2 - \alpha)x^{1-\alpha} - ahx^{-\alpha-1} + (\beta + 1)(ke - dx^{-\alpha})$$

则 $\varphi((\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}}) < 0$ 。令

$$\varphi(x) = [(1 - \alpha)ax - (2 - \alpha)(1 - \alpha)bx^2 + \alpha(\alpha + 1)h + \alpha(\beta + 1)dx]x^{-\alpha-2}$$

由 $\varphi'((\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}}) = 0$ 知, 只要取

$$\beta + 1 =$$

$$\frac{b(2 - \alpha)(1 - \alpha)(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} - \alpha\alpha(\alpha - 1)(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} - \alpha(\alpha + 1)h}{\alpha d(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}}}$$

则可使 $x = (\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}}$ 为 $\varphi(x)$ 的驻点。

令

$$\psi(x) = \alpha(\alpha - 1)ax - (2 - \alpha)(1 - \alpha)bx^2 + \alpha(\alpha + 1)h + \alpha(\beta + 1)dx$$

则 $\psi'(x) = x^{-\alpha-2}\psi(x)$

故

$$\psi''(x) = \psi'(x)x^{-\alpha-2} + \psi(x)(x^{-\alpha-2})'$$

$$\psi'(x) = -(2 - \alpha)(1 - \alpha)bx + \frac{\psi(x)}{x} - \alpha(\alpha + 1)hx^{-1}$$

得

$$\psi'((\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}}) = -(2 - \alpha)(1 - \alpha)b(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} -$$

$$\alpha(\alpha + 1)h(\frac{d}{ke})^{-\frac{1}{\alpha}} < 0$$

$$\psi''((\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}}) = [-(2 - \alpha)(1 - \alpha)b(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} - \alpha(\alpha +$$

$$1)h(\frac{d}{ke})^{-\frac{1}{\alpha}}] (\frac{d}{ke})^{-\frac{2}{\alpha}} < 0$$

故 $x = (\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}}$ 为 $\varphi(x)$ 的极大值点, 从而

$$D \equiv \frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} < 0$$

由 Dulac 定理知, 当 $\frac{2b}{a} < (\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}}$ 且 $(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} <$

$\frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b}$ 时, 模型 (2) 在区域 G 内无闭轨线, 又由

定理 1 知, 正平衡点 A_2 为全局渐进稳定的平衡点。

注: 应用文献 [4- 6] 中定理。

2 极限环的存在性和稳定性

定理 3 当 $(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} < \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b}$ 且 $\frac{a}{2b} < (\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}}$

时, 模型 (2) 在区域 G 内无闭轨。

注: 定理 3 在定理 1(2) 证明过程中已证明。

定理 4 当 $(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} < \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b}$ 且 $(1 - \alpha)a(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} +$

$JP(\alpha - 2)b(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} - ah > 0$ 时, 则模型 (2) 围绕 A_2 至少存

在一个稳定的极限环。

证明 当 $x \in (0 + \infty)$ 时, 将模型 (2) 改写成如下形式:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = kx^\alpha [\frac{x(a - bx) + h}{kx^\alpha} - y] \equiv \varphi(x)[\rho(x) - y] \\ \frac{dy}{dt} = e y (-\frac{d}{e} + kx^\alpha) \equiv e y [\varphi(x) - m] \end{cases} \quad (3)$$

其中, $\rho(x) = \frac{x(a - bx) + h}{kx^\alpha}$, $\varphi(x) = kx^\alpha$, $m = \frac{d}{e}$ 且有

$x_0 = (\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}}$, $y_0 = \rho(x_0)$ 。由 $(1 - \alpha)a(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} + (\alpha -$

$2)b(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} - ah > 0$ $(\frac{d}{ke})^{\frac{1}{\alpha}} < \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b}$, 可知

$\rho(x_0) > 0$ $\rho'(x_0) > 0$ 。又由 $\rho(x_0)$ 的连续性, 存在 (x_0, y_0) 的邻域 $U \subset G$, 使得对任意的 $(x, y) \in U$ 总有 $\rho(x_0) > 0$ 对模型 (3) 取 Lyapunov 函数:

$$V(x, y) = e \int_{x_0}^x \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi(x)} dx + \int_{y_0}^y \frac{y - y_0}{y} dy, (x, y) \in U$$

易得 $\int_{y_0}^y \frac{y - y_0}{y} dy > 0$ 而 $\varphi'(x) = \alpha kx^{\alpha-1} > 0 (x > 0)$,

有 $(x - x_0)[\varphi(x) - \varphi(x_0)] > 0 (x \neq x_0)$ 故 $V(x, y) > 0$ $(x, y) \in U \setminus (x_0, y_0)$ 。

对 V 沿模型 (3) 求导得:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \\ &e[\varphi(x) - \varphi(x_0)] \cdot [\rho(x) - \rho(x_0)] = \\ &e\varphi'(\xi)\rho'(\zeta)(x - x_0)^2, (x, y) \in U \end{aligned}$$

ξ, ζ 落在以 x_0 为心的某一去心邻域内, 所以有

$\frac{dV}{dt} \geq 0$ 且 $\frac{dV}{dt} = 0$ 的集合除了 (x_0, y_0) 外无整条轨线, 由克拉索夫斯基不稳定定理知: (x_0, y_0) 为不稳定点, 因此 (x_0, y_0) 可作为 Poincare - Bendixson 环域的内境界线。

构造 Poincare - Bendixson 环域的外境界线 Σ , 并讨论模型穿过边界 Σ 的轨线的走向。 Σ 由如下线段构成:

$L_1 \equiv x = 0$ 则 $\frac{dL_1}{dt} = \frac{dx}{dt} = h > 0$ 模型 (3) 穿过

L_1 的轨线从左至右。

$L_2 \equiv y = 0$ 为模型 (3) 的轨线。

$L_3 \equiv x - x_1 = 0$ $x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bh}}{2b}$, $0 < y \leq A$, 其

中 $A = \max_{x \in [x_0, x_1]} \rho(x)$, $\frac{dL_3}{dt} = \frac{dx}{dt} = -y k x_1 < 0$ 。因此, L_3 为模型 (4) 的无切线段, 穿过 L_3 的轨线从右向左。

L_4 模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varphi(x)[A - y] \\ \frac{dy}{dt} = e y [\varphi(x) - m] \end{cases} \quad (4)$$

以 (x_1, A) 为起点的轨线, 而模型有唯一的正平衡 $(x_0,$

$A)$ 。当 $x > x_0, y > A$ 时, $\frac{dy}{dx} < 0$ 因此模型 (4) 过 $(x_0,$

$A)$ 的轨线递减且与 $x = x_0$ 相交于 (x_0, B) , 记此段轨线

为 L_4 , 这时 $B > A$; 再过 (x_0, B) 作水平线段 $L_5: L_5 = y - B = 0$ 因为 $\varphi'(x) > 0 (x > 0)$, 所以当 $x < x_0$ 时,

$\varphi(x) < \varphi(x_0) = m$, 故 $\frac{dL_5}{dt} = \frac{dy}{dt} = eB[\varphi - m] < 0$

且穿过 L_5 的轨线从上至下。

在 L_4 上, $\frac{dx}{dt} = \varphi(x)[\rho(x) - y] < \varphi(x)[A - y] =$

$\frac{dx}{dt} < 0$ $\frac{dy}{dt} = e y [\varphi(x) - m] > 0$ 因此, $L_1, L_2,$

L_3, L_4, L_5 构成模型的环境的外境界线, 且穿过边界的轨线均从外至内。因此在 A_2 的周围至少存在一个稳定的极限环。

注: 应用文献 [4- 6] 中定理。

3 数值仿真与生态意义

例 1 考虑如下模型

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x) - y \cdot x^{0.5} + 1 \\ \frac{dy}{dt} = y(-1 + x^{0.5}) \end{cases}$$

此模型在第一象限有唯一的正平衡点 (1, 1) 且满足定理 2 的条件, 利用 Maple 绘图程序, 得到了第一象限出发的轨线均无限趋于正平衡点 (1, 1) 的图形, 如图 1 所示。

例 2 如下模型

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(12 - 2x) - y \cdot x^{0.5} + 2 \\ \frac{dy}{dt} = y(-1 + x^{0.5}) \end{cases}$$

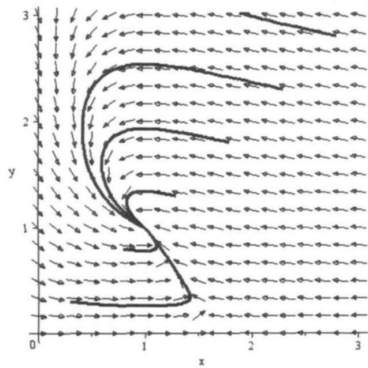


图 1 定理 2 的数值仿真

此模型在第一象限有唯一的正平衡点 $(1, 1.2)$ 且参数满足定理 4 的条件, 利用 *Maple* 绘图程序, 得到了第一象限正平衡点 $(1, 1.2)$ 周围存在稳定的极限环, 验证了定理 4 的结论, 如图 2 所示。

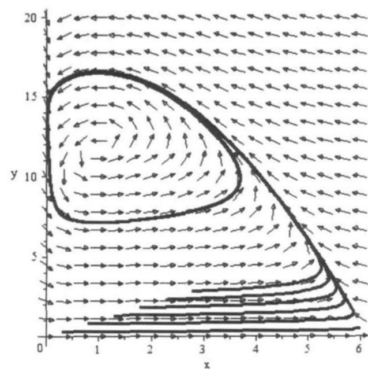


图 2 定理 4 的数值仿真

注: 应用文献 [7-8] 知识中画图。

生态意义: 定理 2 的结论表明, 在相应的参数条件下, 两种群共生, 最终保持在平衡位置; 定理 4 的结论表明, 两种群均不会灭绝, 它们的数量在平衡点邻近呈现为稳定的周期振荡。

参考文献:

- [1] 匡奕群, 邱梅青. 具常数存在的非线性功能反应捕食模型的定性分析 [J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(15): 104-109
- [2] 陈柳娟. 稀疏效应下具常数投放率的食饵-捕食系统的极限环 [J]. 数学研究, 2006, 39(3): 293-298
- [3] 杨春霞, 王辉, 胡志兴. 具常数投放率功能反应为的食饵-捕食系统的定性分析 [J]. 生物数学学报, 2010(1): 97-103
- [4] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题 [M]. 北京: 科学出版社, 2005
- [5] 张芷芬, 同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1985
- [6] 叶彦谦. 多项式微分系统定性理论 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1995
- [7] 林翼, 熊佐亮. 稀疏效应下捕食-食饵系统的定性分析与计算机实验 [J]. 南昌大学学报, 2007(29): 147-151.
- [8] 洪伟. Maple6 实用教程 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2001

Qualitative Analysis of Predator-Prey System with Constant Rate Stoking

LIU Haq, ZHANG Zhao-qiang, LIU Qi-kuan

(School of Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China)

Abstract In this paper, we studied a predator-prey system with constant rate stoking. We discussed the stability of equilibrium, used the *Poincaré-Bendixson's* annular theorem to get some sufficient conditions for the existence and stability for limit cycles of such systems. stable of the limit cycle around the positive equilibrium of the system, at the same time given meaning to the corresponding conclusions on the ecology. Through carrying on sketch to design with the computer software *Maple*, we can clearly understand line direction and trends. in order to demonstrate the validity of qualitative for differential power system was proved.

Key words equilibrium points, global stability, limit cycle, *Maple* software