第 24卷第 1期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol.24 No.1
2011年 2月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Feb. 2011
文章编号: 1673-1549(2011)01-0041-03

中立型随机积分微分方程的稳定性

王春生

(广州大学华软软件学院, 广州 510990)

摘 要: 考虑一类中立型随机积分微分方程, 并通过应用 Banach不动点方法得出使得其零解均方指数稳定性的条件, 同时对所得的零解均方指数稳定给出了严格的证明。一些相关文献的结果被改进。

关键词: 不动点; 均方指数稳定性; 中立型随机积分微分方程

中图分类号: O211.63 文献标识码: A

很多专家学者, 已利用 Lyapunov直接法、不动点方法以及其它方法研究了确定性和随机微分方程以及积分微分方程解的稳定性、有界性和周期解的存在性, 并对三种方法进行了分析和比较[1-11]。作为不动点方法的推广, 作者已经在文献[12]中研究了一类随机积分微分方程的均方指数稳定性和 L^2 稳定性, 改进了文献[10]的部分结论。作为该研究的深入推广, 这里将继续采用 Banach不动点方法研究一类中立型随机积分微分方程的均方指数稳定性。

1 主要结果

设 $\{\Omega, F, P\}$为完备空间, 具有满足通常条件的流 $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$。$\{\omega(t), t\geqslant 0\}$是定义在此空间上的标准一维 Wiener过程, 函数 $q(t), a(t), b(t), G(t)\in C(R^+, R)$, $\tau(t)\in C(R^+, R^+)$ 且 $|\tau(t)|<\infty$。且满足当 $t\to\infty$时, $t-\tau(t)\to\infty$。

考虑如下中立型随机积分微分方程

$$d[x(t)-q(t)x(t-\tau(t))]=[a(t)x(t)+b(t)x(t-\tau(t))]dt+\int_0^t G(t-s)x(s)ds\,d\omega(t),\ t\geqslant 0 \quad (1)$$

及初始条件 $x_0=\varphi(t)\in C([m(0), 0], R)$, 其中 $x(t)\in R$, $m(0)=\inf\{s-\tau(s), s\geqslant 0\}$。

作为方程(1)的特殊情形, 文献[12]已经研究了如下方程

$$dx(t)=a(t)x(t)dt+\int_0^t G(t-s)x(s)ds\,d\omega(t),\ t\geqslant 0 \quad (2)$$

得出方程(2)均方指数稳定性的定理:

定理 1 假设存在一些正的常数 $\beta, M_0, \gamma, \kappa, M$ 和 $\eta\in(0,1)$以及连续函数 $h(s):[0,\infty]\to R^+$, 使得对 $t\geqslant 0$,

(1) $e^{-\int_s^t h(\mu)d\mu}|a(s)+h(s)|\leqslant Me^{-\kappa(t-s)}$, $0\leqslant s<t$

(2) $\sup\limits_{t\geqslant 0}\int_0^t e^{-\gamma(s-t)}e^{-2\int_s^t h(\mu)d\mu}ds\leqslant M_0$

(3) $\int_0^t e^{-\int_s^t h(\mu)d\mu}|a(s)+h(s)|ds+\dfrac{\beta}{\gamma}\left(\int_0^t e^{-2\int_s^t h(\mu)d\mu}ds\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\eta<1$

(4) $|G(t)|\leqslant\beta e^{-\gamma t}$

则方程(2)的零解指数均方稳定。

作为推广, 本文将采用 Banach不动点方法研究一类中立型随机积分微分方程的均方指数稳定性。得到下面结论:

定理 2 假设 $\tau(s)$可微, 且存在正的常数 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, M, M_1, M_2, M_3, \gamma$和 $\eta\in(0,1)$以及连续函数 $h(s):[0,\infty]\to R^+$, 使得对 $t\geqslant 0$,

(1) $e^{-\int_s^t h(\mu)d\mu}|(a(s-\tau(s))+h(s-\tau(s)))(1-\tau'(s))+b(s)-q(s)h(s)|\leqslant M_1e^{-\alpha_1(t-s)}$, $0\leqslant s<t$

(2) $e^{-\int_s^t h(\mu)d\mu}|a(s)+h(s)|\leqslant M_2e^{-\alpha_2(t-s)}$, $0\leqslant s<t$

(3) $e^{-\int_s^t h(\mu)d\mu}|a(s-\tau(s))+h(s-\tau(s))|\leqslant M_3e^{-\alpha_3(t-s)}$, $0\leqslant s<t$

(4) $\sup\limits_{t\geqslant 0}\int_0^t e^{-\gamma(s-t)}e^{-2\int_s^t h(\mu)d\mu}ds\leqslant M$

(5) $|q(t)|+\int_{t-\tau(t)}^t|a(s)+h(s)|ds+$

收稿日期: 2010-10-21

作者简介: 王春生(1982-), 男, 安徽桐城人, 硕士, 主要从事随机微分方程稳定性方面的研究。

$$\int_0^t e^{-\int_s^t h(\mu)d\mu}\left|\begin{array}{l}a(s-\tau(s))+h(s-\tau(s))(1-\tau'(s))+\\ b(s)-q(s)h(s)\end{array}\right|ds+$$

$$\int_0^t e^{-\int_s^t h(\mu)d\mu}|h(s)|\left(\int_{s-\tau(s)}^s|a(v)+h(v)|dv\right)ds+$$

$$\frac{\beta}{\gamma}\left(\int_0^t e^{-2\int_s^t h(\mu)d\mu}ds\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\eta<1$$

(6) $|G(t)|\leqslant\beta e^{-\gamma t}$

则方程(1)的零解指数均方稳定。

注 1 如果在定理 2中选取 $q(t)=b(t)=0$, 则定理 2就退化为定理 1的结论。

2 定理 2的证明

证明 用 S表示为 F-适应过程 $\phi(t,\omega)$: $[m(0),\infty)\times\Omega\to R$组成的 Banach空间, 且对固定的 $\omega\in\Omega$, $\phi(t,\omega)$对 t几乎处处连续。更进一步, 假设当 $s\in[m(0),0]$时, $\phi(t,\omega)=\varphi(s)$; 且当 $t\to\infty$时, 存在一正常数 $0<\alpha<\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma\}$使得 $e^{\alpha t}E|\varphi(t,\omega)|^2\to 0$。

定义算子 Ψ: S$\to$ S如下:

(1)当 $t\in[m(0),0]$时, $(\Psi\varphi)(t)=\varphi(t)$。

(2)当 $t\geqslant 0$时,

$$(\Psi\varphi)(t)=\left(\varphi(0)-q(0)\varphi(-\delta(0))-\int_{-\tau(0)}^0[h(s)+a(s)]\varphi(s)ds\right)e^{-\int_0^t h(\mu)d\mu}+$$

$$q(t)\varphi(t-\delta(t))+\int_{t-\tau(t)}^t[h(s)+a(s)]\varphi(s)ds+$$

$$\int_0^t e^{-\int_s^t h(\mu)d\mu}[(a(s-\tau(s))+h(s-\tau(s)))$$

$$(1-\tau'(s))+b(s)-q(s)h(s)]\varphi(s-\tau(s))ds-$$

$$\int_0^t h(s)e^{-\int_s^t h(\mu)d\mu}\left(\int_{s-\tau(s)}^s[h(v)+a(v)]\varphi(v)dv\right)ds+$$

$$\int_0^t e^{-\int_s^t h(\mu)d\mu}\left(\int_0^s G(s-r)\varphi(r)dr\right)d\omega(s)=\sum_{i=1}^5 I_i(t)\qquad(3)$$

首先证明 Ψ在$[0,\infty]$上均方连续。令 $\varphi\in S$, $t_1\geqslant 0$, $|\lambda|$充分小,

$$E|(\Psi\varphi)(t_1+\lambda)-(\Psi\varphi)(t_1)|^2\leqslant$$

$$5\sum_{i=1}^5 E|I_i(t_1+\lambda)-I_i(t_1)|^2$$

易证, 当 $\lambda\to 0$, $E|I_i(t_1+\lambda)-I_i(t_1)|^2\to 0$, $i=1,2,3,4$。此外, 由 $Burkh\ddot{o}lder-Davis-Gundy$不等式得到, 当 $\lambda\to 0$,

$$E|I_5(t_1+\lambda)-I_5(t_1)|^2=$$

$$E\left|\int_0^{t+\lambda}e^{-\int_s^{t+\lambda}h(\mu)d\mu}\left(\int_0^s G(s-r)\varphi(r)dr\right)d\omega(s)-\int_0^t e^{-\int_s^t h(\mu)d\mu}\left(\int_0^s G(s-r)\varphi(r)dr\right)d\omega(s)\right|^2=$$

$$E\left|\int_0^t e^{-\int_s^t h(\mu)d\mu}\left(e^{-\int_t^{t+\lambda}h(\mu)d\mu}-1\right)\left(\int_0^s G(s-r)\varphi(r)dr\right)d\omega(s)+\int_t^{t+\lambda}e^{-\int_s^{t+\lambda}h(\mu)d\mu}\left(\int_0^s G(s-r)\varphi(r)dr\right)d\omega(s)\right|^2\leqslant$$

$$2E\int_0^t e^{-2\int_s^t h(\mu)d\mu}\left(e^{-\int_t^{t+\lambda}h(\mu)d\mu}-1\right)^2\left(\int_0^s G(s-r)\varphi(r)dr\right)^2ds+$$

$$2E\int_t^{t+\lambda}e^{-2\int_s^{t+\lambda}h(\mu)d\mu}\left(\int_0^s G(s-r)\varphi(r)dr\right)^2ds\leqslant$$

$$2\frac{\beta^2}{\gamma^2}E\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant t+\lambda}|\varphi(t)|^2\right)\left\{\int_0^t e^{-2\int_s^t h(\mu)d\mu}\left(e^{-\int_t^{t+\lambda}h(\mu)d\mu}-1\right)^2ds+\int_t^{t+\lambda}e^{-2\int_s^{t+\lambda}h(\mu)d\mu}ds\right\}\to 0\qquad(4)$$

所以, 可以断定 Ψ在$[0,\infty]$上是均方连续的。对于 $\Psi(S)\subset S$,

$$e^{\alpha t}E|(\Psi\varphi)(t)|^2\leqslant 5\sum_{i=1}^5 e^{\alpha t}E|I_i(t)|^2$$

由于当 $t\to\infty$时, $t-\delta(t)\to\infty$, $t-\tau(t)\to\infty$, 则必存在一常数 θ,ρ, 使得, 当 $t\to\infty$时, 有

$$e^{\theta t}E|\varphi(t-\delta(t))|^2\to 0,\ e^{\rho t}E|\varphi(t-\tau(t))|^2\to 0$$

所以由定理 2条件(1)-(6)易证 $e^{\alpha t}E|I_i(t)|^2\to 0$, $i=1,2,3,4$。

此外, 由条件(4)知, 当 $t\to\infty$时,

$$e^{\alpha t}E|I_5(t)|^2=$$

$$e^{\alpha t}E\int_0^t e^{-2\int_s^t h(\mu)d\mu}\left(\int_0^s G(s-r)\varphi(r)dr\right)^2ds\leqslant$$

$$\frac{M\beta^2}{2\gamma}e^{-(\gamma-\alpha)t}\int_0^t e^{\alpha s}E|\varphi(s)|^2e^{(\gamma-\alpha)s}ds\to 0\qquad(5)$$

所以, $\Psi(S)\subset S$。

再者, 证明 Ψ是压缩的, 由条件(v)易知, 存在常数 $L>0$, 使得

$$\left(1+\frac{1}{L}\right)\left\{|q(t)|+\int_{t-\tau(t)}^t|a(s)+h(s)|ds+\int_0^t e^{-\int_s^t h(\mu)d\mu}|a(s-\tau(s))+h(s-\tau(s))\times(1-\tau'(s))+b(s)-q(s)h(s)|ds+\int_0^t e^{-\int_s^t h(\mu)d\mu}|h(s)|\left(\int_{s-\tau(s)}^s|a(v)+h(v)|dv\right)ds\right\}^2+$$

$$(1+L)\frac{\beta^2}{\gamma^2}\int_0^t e^{-2\int_s^t h(\mu)d\mu}ds\leqslant\eta^2<1\qquad(6)$$

因此, 对任意 $\varphi,\xi\in s$,

$$E\sup_{s\in[0,t]}|(\Psi\varphi)(s)-(\Psi\xi)(s)|^2\leqslant E\sup_{s\in[0,t]}|\varphi(s)-\xi(s)|^2$$

$$\left\{\left(1+\frac{1}{L}\right)\left\{|q(t)|+\int_{t-\tau(t)}^t|a(s)+h(s)|ds+\int_0^t e^{-\int_s^t h(\mu)d\mu}|a(s-\tau(s))+h(s-\tau(s))\times(1-\tau'(s))+b(s)-q(s)h(s)|ds+\int_0^t e^{-\int_s^t h(\mu)d\mu}|h(s)|\left(\int_{s-\tau(s)}^s|a(v)+h(v)|dv\right)ds\right\}^2+\right.$$

$$(1+L)\frac{\beta^2}{\gamma^2}\int_0^t e^{-2\int_s^t h(\mu)d\mu}ds \quad (7)$$

由 (6)式知, Ψ是压缩映射。由压缩映射定理知, Ψ在空间 S上存在唯一不动点 x(t)。满足 x(0) = φ, 且存在满足 $0<\alpha<\min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma\}$ 的正常数 α, 使得当 $t\to\infty$时, $e^{\alpha t}E|x(t)|^2\to 0$。所以方程 (1)的零解指数均方稳定。故得证。

3 实 例

例 1 考虑如下中立型随机积分微分方程

$$d[x(t)] = -2x(t)dt + \int_0^t e^{-(t-s)}x(s)dsd\omega(t),\ t\geqslant 0 \quad (8)$$

如果在定理 2中取 h(t) ≡ 2, 则方程 (8)零解指数均方稳定。

例 2 考虑如下中立型随机积分微分方程

$$d[x(t)-c_1x(t-\tau)] = [-c_2x(t)+c_3x(t-\tau)]dt + \int_0^t \beta e^{-(t-s)}x(s)dsd\omega(t),\ t\geqslant 0 \quad (9)$$

其中, $c_2>0$, $\tau(t)>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$。如果在定理 1中取 $h(t)\equiv c_2$, 则方程 (9)零解指数均方稳定的条件是: $|c_1|+\frac{|c_3-c_1c_2|}{c_2}+\frac{\beta}{2\sqrt{c_2}\gamma}<1$。

注 2 文章利用 Banach不动点定理研究了一类中立型随机积分微分方程零解的指数均方稳定性, 所得的结论改进了 Lyapunov理论和 Mao Xuerong[10]的结果。在应用不动点理论时, 通过引进一个新的函数 h(s)来研究随机微分方程的稳定性, 这样就使得稳定性的研究更加简单易行。

参 考 文 献:

[1] Burton T A. Fixed points and stability of a nonconvolution equation [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2004, 132: 3679-3687.

[2] Burton T A, Furumochi T. A note on stability by Schauder's theorem [J]. Funkcialaj Ekvacioj, 2001, 44: 73-82.

[3] Burton T A, Furumochi T. Fixed points and problems in stability theory[J]. Dynamical Systems and Applications, 2001, 10: 89-116.

[4] Burton T A, Furumochi T. Krasnoselskii's fixed point theorem and stability[J]. Nonlinear Analysis, 2002, 49: 445-454.

[5] Raffoul Y N. Stability in neutral nonlinear differential equations with functional delays using fixed-point theory[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2004, 40: 691-700.

[6] Zhang Bo. Fixed points and stability in differential equations with variable delays[J]. Nonlinear Analysis, 2005, 63: 233-242.

[7] Luo Jiaowan. Fixed points and stability of neutral stochastic delay differential equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 334: 431-440.

[8] Wu Meng, Huang Nanjing, Zhao Changwen. Fixed points and stability in neutural stochastic differential equations with variable delays[J]. Hindawi Pubilishing Corporation Fixed Points Theory and Applications, 2008, 11: 1-11.

[9] Burton T A. Stability by fixed point theory or Liapunov's theory: a comparison[J]. Fixed Point Theory, 2003, 4: 15-32.

[10] Mao Xuerong. Stability of stochastic integro-differential equations, stochastic analysis and applications [J]. Stochastics, 2000, 18(6): 1005-1017.

[11] Wu R Q, Mao Xuerong. Existence and uniqueness of solutions of stochastic differential equations[J]. Stochastics, 1983, 11: 19-32.

[12] 王春生. 不动点与随机积分微分方程的稳定性 [J]. 广州大学学报: 自然科学版, 2009, 8(2): 49-52.

Stability of Neutral Stochastic Integro-differential Equations

WANG Chun-sheng

(South China Institute of Software Engineering, Guangzhou University, Guangzhou 510990, China)

Abstract We considered the exponential stability in mean square of a kind of neutral stochastic integro-differential equations with bounded delays by means of fixed point method, and proved the mean square exponetial stability of zero solution. Some literature results were improved.

Key words fixed points; exponential stability in mean square; neutral stochastic integro-differential equations