第 24卷第 1期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol.24 No.1
2011年 2月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Feb. 2011
文章编号: 1673-1549(2011)01-0027-02

极大前缀码的一个性质

赵 平[1], 陈云坤[2], 胡华碧[1], 郭 凯[1]

(1.贵阳医学院基础医学院, 贵阳 550004; 2.贵州师范大学数学与计算机科学学院, 贵阳 550001)

摘 要: 设 X^* 是字母表 X 的自由幺半群, 以 X^* 为顶点集构造一个语言图 $\Gamma(X^*)$, 引入语言图 $\Gamma(X^*)$ 的横截集的概念。利用语言图 $\Gamma(X^*)$ 的横截集与极大前缀码的关系, 即前缀码 A 是极大前缀码的充要条件是 A 是语言图 $\Gamma(X^*)$ 的横截集, 给出了极大前缀码的一个性质。

关键词: 前缀码; 极大前缀码; 语言图 $\Gamma(X^*)$ 的横截集

中图分类号: O152.7　　文献标识码: A

1 基本概念

极大前缀码是一类特殊的前缀码, 在实践和理论特别是理论计算机科学中有着重要的应用。因此研究极大前缀码的结构和性质具有重要意义。关于极大前缀码的结构和性质, 已取得不少重要的结果[1-8]。文献[1]中 Berstel J等系统地归纳了人们对极大前缀码的研究工作。文献[7]中, 以 X^* 为顶点集构造一个语言图 $\Gamma(X^*)$, 首次引入语言图 $\Gamma(X^*)$ 的横截集的概念, 给出了极大前缀码的一个刻划。本文将在文献[7]工作的基础上, 利用文献[7]的结果, 给出极大前缀码的一个性质。

设 X 是一个字母表, X^+ (X^*)是由 X 生成的自由(幺)半群, X^* 的元素称为 X 上的字, 空字是 X^* 的单位元, 记为 1。如果 $A \subseteq X^*$ 非空, 则称 A 是 X^* 的一个语言。如果 $A \cap AX^+ = \Phi$, 则称 A 是前缀码。如果前缀码 A 满足: 对任意 $\omega \in X^+ \setminus A$, 有 $A \cup \{\omega\}$ 不是前缀码, 则称 A 是极大前缀码。

文献[7]中, 以 X^* 为顶点集构造一个语言图 $\Gamma(X^*)$: 设字 $\omega_1, \omega_2 \in X^*$, 如果存在字母 $x \in X$, 使 $\omega_2 = \omega_1 x$, 则称字母 x 是一条以字 ω_1 为起点, 以 ω_2 为终点的有向边; 如果存在 $x \in X^+$, 使 $\omega_2 = \omega_1 x$, 则称 x 是一条由字 ω_1 通向字 ω_2 的路径。这样, 语言图 $\Gamma(X^*)$ 是一棵以空字 1为根, X 中的字母为有向边, X^* 中的字为结点的有向树。

定义 1 设 $A \subseteq X^+$ 非空, 令 $T_A = \cup_{\omega \in A} W_\omega$, W_ω 为语言图 $\Gamma(X^*)$ 中从根 1到结点 ω 的路径上所有结点(含 ω, 1)的集合。以 T_A 为结点, 空字 1为根构造一棵有向树, 称此有向树为语言图 T_A。

定义 2 设 $A \subseteq X^+$ 非空, 若 A 满足: 对任意 $u \in T_A^C$, 有 $W_u \cap A \neq \Phi$, 其中 $T_A^C = X^* \setminus T_A$, 则称 A 是语言图 $\Gamma(X^*)$ 的横截集。

约定: 对任意 $x \in X^*$, $\lg(x)$ 表示 x 所含 X 中字母的个数, 称为 x 的长度。对任意 $A \subseteq X^+$ 非空, A 中字的个数记为 $|A|$。令 $\lg(A) = \max\{\lg(x): x \in A\}$, 称为 A 的长度。对任意 $A, B \subseteq X^*$, 若 $A \cap B = \Phi$, 我们用 $A + B$ 表示 $A \cup B$, 称为 A 与 B 之和。

本文未定义的术语及记法参见文献[1]。

2 主要结果及证明

引理 1 设 A 是前缀码, 则 A 是极大前缀码的充要条件是 A 是语言图 $\Gamma(X^*)$ 的横截集。

证明 见文献[7]定理 4.5。

引理 2 设 A, B 是前缀码, 则 AB 是前缀码。

证明 见文献[1]第三章命题 2.2。

定理 1 设 $A, B \subseteq X^+$ 非空。令 $M = A_0 \cup A_1 B$, 其中 $A = A_0 + A_1$, 则

(1)若 A, B 是极大前缀码, 则 M 是极大前缀码。

(2)若 M 是极大前缀码且 A 是前缀码, 则 A, B 是极大前缀码。

证明 (1) $M \cap MX^+ = (A_0 \cap A_0X^+) \cup (A_0 \cap A_1BX^+) \cup (A_1B \cap A_1BX^+) \cup (A_1B \cap A_0X^+)$。由 A, B 是前缀码及引理 2可得, $A_0 \cap A_0X^+ = A_0 \cap A_1BX^+ =$

收稿日期: 2010-11-06

基金项目: 贵州省科学技术基金项目(黔科合 J字 LKS[2010]04); 贵阳医学院青年基金(K2009-10)

作者简介: 赵 平(1973-), 男, 贵州遵义人, 副教授, 硕士, 主要从事信息及编码理论方面的研究。

$A_1B \cap A_1BX^+ = \Phi$。若 $A_1B \cap A_0X^+ \neq \Phi$, 则存在 $a_0 \in A_0$, $a_1 \in A_1$, $b \in B$, $x \in X^+$, 使 $a_1 b = a_0 x$。由 $A = A_0 + A_1$知, $a_0 \neq a_1$, 于是 a_0与 a_1中一个必是另一个的前缀, 与 A 是前缀码矛盾。因此, $M \cap MX^+ = \Phi$, 即 M 是前缀码。要证明 M 是极大前缀码, 由引理 1知, 只需再证明 M 是语言图 $\Gamma(X^*)$的横截集, 即要证: 对任意 $u \in T_M^C$, 有 $W_u \cap M \neq \Phi$。任意取 $u \in T_M^C$, 由 T_A及 T_M 的定义知, $T_A \subseteq T_M$, 于是 $T_M^C \subseteq T_A^C$, 从而 $u \in T_A^C$。再由 A 是极大前缀码及引理 1知, 有 $W_u \cap A \neq \Phi$, 于是存在 $a \in A$, $x \in X^+$, 使 $u = ax$。若 $a \in A_0$, 则 $a \in W_u \cap A_0 \subseteq W_u \cap M$。若 $a \in A_1$, 我们断言 $x \in T_B^C$。若 $x \in T_B$, 则由 T_B 的定义知, 存在 $y \in X^*$, 使 $xy \in B$, 于是 $uy = a(xy) \in A_1B \subseteq M$, 从而 $u \in W_{uy} \subseteq T_{A_1B} \subseteq T_M$, 与 $u \in T_M^C$ 矛盾。因此, $x \in T_B^C$。由 B 是极大前缀码及引理 1知, $W_x \cap B \neq \Phi$, 于是存在 $b \in B$, $y \in X^+$, 使 $x = by$, 于是 $u = ax = (ab)y$, 从而 $ab \in W_u \cap A_1B \subseteq W_u \cap M$。因此, $W_u \cap M \neq \Phi$。

(2)要证明 A 是极大前缀码, 由引理 1知, 只需证明 A 是语言图 $\Gamma(X^*)$ 的横截集, 即要证: 对任意 $u \in T_A^C$, 有 $W_u \cap A \neq \Phi$。任意取 $u \in T_A^C$, 若 $u \in T_A^C \cap T_M^C$, 由 M 是极大前缀码及引理 1知, $W_u \cap M \neq \Phi$, 即 $W_u \cap (A_0 \cup A_1B) \neq \Phi$。若 $W_u \cap A_0 \neq \Phi$, 则存在 $a_0 \in A_0$, $x \in X^+$, 使 $u = a_0x$, 从而 $a_0 \in W_u \cap A_0 \subseteq W_u \cap A$; 若 $W_u \cap A_1B \neq \Phi$, 则存在 $a_1 \in A_1$, $b \in B$, $x \in X^+$, 使 $u = a_1bx$, 从而 $a_1 \in W_u \cap A_1 \subseteq W_u \cap A$。若 $u \in T_A^C \cap T_M$, 则由 T_M 的定义知, 存在 $v \in X^*$, 使 $uv \in M = A_0 \cup A_1B$。由 $u \in T_A^C$知, 必有 $uv \in A_1B$, 否则, 若 $uv \in A_0$, 则 $u \in W_{uv} \subseteq T_{A_0} \subseteq T_A$, 与 $u \in T_A^C$ 矛盾。由 $uv \in A_1B$ 知, 存在 $a_1 \in A_1$, $b \in B$, 使 $uv = a_1b$。由 $u \in T_A^C$ 知, 必有 $\lg(u) > \lg(a_1)$, 否则, 若 $\lg(u) \leqslant \lg(a_1)$, 则存在 $w \in X^*$, 使 $a_1 = uw$, 从而 $u \in W_{a_1} \subseteq T_A$, 与 $u \in T_A^C$ 矛盾。由 $uv = a_1b$及 $\lg(u) > \lg(a_1)$知, 存在 $x \in X^+$, 使 $u = a_1x$, 从而 $a_1 \in W_u \cap A_1 \subseteq W_u \cap A$。因此, $W_u \cap A \neq \Phi$。至此 A 是极大前缀码得证。若 B 不是前缀码, 则 $B \cap BX^+ \neq \Phi$, 从而 $A_1B \cap A_1BX^+ \neq \Phi$, 与 M 是前缀码矛盾。因此, B 是前缀码。要证明 B 是极大前缀码, 由引理 1知, 只需证明 B 是语言图 $\Gamma(X^*)$的横截集, 即要证: 对任意 $u \in T_B^C$, 有 $W_u \cap B \neq \Phi$。任意取 $u \in T_B^C$, 我们断言 $A_1u \subseteq T_M^C$。若存在 $a_1 \in A_1$, 使 $a_1u \in T_M$, 则由 T_M 的定义知, 存在 $x \in X^*$, 使 $a_1ux \in M = A_0 \cup A_1B$。若 $a_1ux \in A_0$, 则 $a_1ux \in A_0 \cap A_1X^+ \subseteq A \cap AX^+$, 与 A 是前缀码矛盾。若 $a_1ux \in A_1B$, 则存在 $\overline{a_1} \in A_1$, $b \in B$, 使 $a_1ux = \overline{a_1}b$。由 A 是前缀码知, $a_1 = \overline{a_1}$, $ux = b$, 从而 $u \in W_b \subseteq T_B$, 与 $u \in T_B^C$矛盾。因此, $A_1u \subseteq T_M^C$。任意取 $a_1 \in A_1$, 则 $a_1u \in T_M^C$。由 M 是极大前缀码及引理 1知, $W_{a_1u} \cap M \neq \Phi$, 即 $W_{a_1u} \cap (A_0 \cup A_1B) \neq \Phi$。我们断言 $W_{a_1u} \cap A_1B \neq \Phi$。若 $W_{a_1u} \cap A_1B = \Phi$, 则 $W_{a_1u} \cap A_0 \neq \Phi$, 于是存在 $a_0 \in A_0$, $x \in X^+$, 使 $a_1u = a_0x$。由 $A = A_0 + A_1$知, $a_1 \neq a_0$, 于是 a_0与 a_1中一个必是另一个的前缀, 与 A 是前缀码矛盾。由 $W_{a_1u} \cap A_1B \neq \Phi$知, 存在 $\overline{a_1} \in A_1$, $b \in B$, $x \in X^+$, 使 $a_1u = \overline{a_1}bx$。由 A 是前缀码可得, $a_1 = \overline{a_1}$, $u = bx$, 从而 $b \in W_u \cap B$。因此, $W_u \cap B \neq \Phi$。至此定理 1得证。

参考文献:

[1] Berstel J, Perrin D. Theory of Codes[M]. New York: Academic Press, 1985.

[2] 王水汀. 关于前缀码与极大前缀码的一个注记[J]. 数学杂志, 1989, 9(2): 229-232.

[3] 杨耀池, 邱伟德. 极大前缀码的性质及其计数[J]. 应用数学学报, 1990, 8(1): 25-30.

[4] Long Dongyang, Jia Weijia, Zhang Liang. Product of finite maximal P-codes[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2002, 79(8): 889-899.

[5] 龙凤山, 龙芳. 极大前缀码的若干判定与性质[J]. 贵州师范大学学报: 自然科学版, 2004, 22(4): 49-52.

[6] 沈传龙, 潘慧丽. 极大前缀码的积[J]. 杭州师范学院学报, 2005, 4(5): 331-333.

[7] 赵平, 徐波. 极大前缀码的刻划[J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(9): 168-171.

[8] 赵平. 关于极大前缀码的刻划的一个注记[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(2): 158-160.

A Property of Maximal Prefix Code

ZHAO Ping[1], CHEN Yun-kun[2], HU Hua-bi[1], GUO Kai[1]

(1. School of Basic Medicine, Guiyang Medical College, Guiyang 550004, China;

2. School of Mathematics and Computer, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China)

Abstract: Let X^* be the free monoid of the alphabet X, the concept of a transversal of the language diagram $\Gamma(X^*)$ is introduced by constructing a language diagram $\Gamma(X^*)$ with X^* as the node set. Using the relation between the transversal of language diagram $\Gamma(X^*)$ and maximal prefix code, i.e. a prefix code A is maximal if and only if A is a transversal of language diagram $\Gamma(X^*)$, a property of maximal prefix code is given.

Key words: prefix code; maximal prefix code; transversal of language diagram $\Gamma(X^*)$