

多重工作休假的 $Geom / Geom / 1 / N$ 排队的稳态分析李彦策¹, 冯 慧², 徐秀丽¹

(1. 燕山大学理学院, 河北 秦皇岛 066004; 2. 长治县第一中学, 山西 长治 047100)

摘 要: 文章研究了多重工作休假的 $Geom / Geom / 1 / N$ 离散时间排队系统。应用矩阵几何解的方法, 给出了稳态下顾客数的概率分布, 并得到了系统平均队长、平均等待队长以及顾客的消失概率等性能指标。最后通过数值例子分析了系统参数对系统的平均队长和消失概率的影响。

关键词: 离散时间排队; 矩阵几何解; 多重工作休假; 有限源

中图分类号: O226

文献标识码: A

引 言

休假排队是近来排队论中的热点问题。2002 年, Servi 与 Finn^[1] 揭开了工作休假排队研究的序幕。与经典的休假排队相比, 工作休假排队的特点在于工作休假期间能低速为顾客服务, 这在理论上增加了模型分析的难度。然而, 工作休假排队模型在光纤通信、电子商务、随机网络、生产管理、计算机系统、生产制造系统等高新技术领域却有更广泛的应用。随后, Kim, Choi 与 Chae^[2], Wu 与 Takagi^[3] 推广了文献 [1] 中的结果, 使用嵌入 Markov 链和复函数围道积分相继研究了多重工作休假 $M / G / 1$ 排队。Babai^[4] 用矩阵分析的方法讨论了 $GIM / 1$ 多重工作休假排队。首次运用矩阵几何解的方法, Liu, Xu 与 Tian^[5] 研究了 $M / M / 1$ 多重工作休假排队, 得到了类似于经典休假排队中普遍存在的随机分解规律。接着, Li, Tian 与 Li^[6] 研究了离散时间 $GI / Geom / 1$ 多重工作休假。

各种工作休假策略的引入及工作休假期间不同服务速度的选取, 为排队系统的稳态设计提供了极大的灵活性, 从而对服务制造过程的管理提供新的手段。然而, 现存的大多数文献集中于单服务台无限排队容量的模型的研究, 只有少数文献分析了单服务台有限容量的排队系统, 如, Tian, Fan 和 Zhao^[7] 研究了单服务台有限

容量 $M / M / 1 / N$ 排队, 实际问题中, 如果排队室容量不是非常大, 那么用排队容量无限的模型去研究就显得不太适合。因此, 在上述研究的基础上, 本文详细分析了一个单服务台有限容量的 $Geom / Geom / 1 / N$ 多重工作休假排队模型。

1 模型的描述

考虑一个多重工作休假的 $Geom / Geom / 1 / N$ 型离散时间排队模型, 其中系统中只有一个服务台, 每次只能接待一位顾客, N 是包括正在服务的顾客在内的系统容量, 一旦系统中顾客数达到 N 个, 再到达的顾客就将消失。因此这也是个消失系统。本文中, 对于 $\forall x \in [0, 1]$, 我们记 $\bar{x} = 1 - x$ 。描述模型如下:

1) 顾客到达只能发生于 $t = n^+$, $n = 0, 1, \dots$ 。到达间隔 A 服从几何分布:

$$P\{A = k\} = p \bar{p}^{k-1}, k \geq 1, 0 < p < 1.$$

2) 服务开始与结束均发生于 $t = n$, $n = 0, 1, \dots$ 。在忙期中的服务时间 S_b 服从几何分布:

$$P\{S_b = k\} = \mu_b \bar{\mu}_b^{k-1}, k \geq 1, 0 < \mu_b < 1$$

在假期中的服务时间 S_v 服从几何分布:

$$P\{S_v = k\} = \mu_v \bar{\mu}_v^{k-1}, k \geq 1, 0 < \mu_v < 1$$

3) 工作休假状态时间 V 服从几何分布:

$$P\{V = k\} = \theta \bar{\theta}^{k-1}, k \geq 1, 0 < \theta < 1$$

收稿日期: 2010-12-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10671170)

作者简介: 李彦策 (1985-) 男, 山西长治人, 硕士生, 主要从事排队系统的瞬态性质方面的研究。http://www.cnki.net

$$\delta_0 = \frac{\bar{\theta} p \bar{\mu}_v}{1 - \bar{\theta}(\rho \bar{\mu}_v + \bar{\mu}_v)}, \quad \delta_1 = \frac{\theta p \bar{\mu}_v}{1 - (\rho \bar{\mu}_b + \bar{\mu}_b)}$$

$$\delta_2 = \frac{p \bar{\mu}_b}{1 - (\rho \bar{\mu}_b + \bar{\mu}_b)}, \quad \delta_3 = \frac{\theta(\rho \bar{\mu}_v + \bar{\mu}_v)}{1 - (\rho \bar{\mu}_b + \bar{\mu}_b)}$$

证明 当 $1 \leq k \leq N - 1$ 时, 计算可得

$$B[R] = \begin{bmatrix} 1 - \rho \bar{\mu}_v & \bar{\theta} p \bar{\mu}_v & \theta p \bar{\mu}_v \\ \bar{\rho} \bar{\mu}_v & \bar{\theta}(1 - \rho \bar{\mu}_v - \bar{\rho} \bar{\mu}_v(1 - a)) & \theta(1 - \rho \bar{\mu}_v - \bar{\rho} \bar{\mu}_v(1 - a)) + \bar{\rho} \bar{\mu}_v b \\ \bar{\rho} \bar{\mu}_b & 0 & 1 - \bar{\rho} \bar{\mu}_b \end{bmatrix}$$

由式 (3) 可知,

$$(\pi_{00} \ \pi_{10} \ \pi_{11})B[R] = (\pi_{00} \ \pi_{10} \ \pi_{11}) \quad (4)$$

得

$$\begin{cases} \pi_{00} = (1 - \rho \bar{\mu}_v)\pi_{00} + \bar{\rho} \bar{\mu}_v \pi_{10} + \bar{\rho} \bar{\mu}_b \pi_{11} \\ \pi_{10} = \bar{\theta} p \bar{\mu}_v \pi_{00} + \bar{\theta}(1 - \rho \bar{\mu}_v - \bar{\rho} \bar{\mu}_v(1 - a))\pi_{10} \\ \pi_{11} = \theta p \bar{\mu}_v \pi_{00} + \theta(1 - \rho \bar{\mu}_v - \bar{\rho} \bar{\mu}_v(1 - a)) + \bar{\rho} \bar{\mu}_v b \pi_{10} + (1 - \bar{\rho} \bar{\mu}_b)\pi_{11} \end{cases}$$

解方程组并利用关系式 (2) 得

$$\begin{cases} \pi_{10} = a\pi_{00} \\ \pi_{11} = b\pi_{00} \end{cases}$$

再由

$$\pi_{00} + \pi_{10} (I - R)^{-1} e = 1$$

这里

$$(I - R)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - a} & \frac{b}{(1 - a)(1 - c)} \\ 0 & \frac{1}{1 - c} \end{bmatrix}$$

得

$$\pi_{00} = \frac{(1 - a)(1 - c)}{1 + b - c}$$

记

$$K = \pi_{00}$$

计算得

$$R^{k-1} = \begin{bmatrix} a^{k-1} & \sum_{j=0}^{k-2} a^j b c^{k-2-j} \\ 0 & c^{k-1} \end{bmatrix}$$

由矩阵几何解的方法, 当 $1 \leq k \leq N - 1$ 时, 有 $\pi_k =$

$\pi_1 R^{k-1}$, 得

$$\begin{cases} \pi_{k0} = K a^k \\ \pi_{k1} = K b \sum_{j=0}^{k-1} a^j c^{k-1-j} \end{cases}$$

当 $k = N$ 时, 利用 (2) 得 π_N 和 π_{N-1} 的关系如下

$$\begin{cases} \pi_{N0} = \pi_{N-10} \bar{\theta} p \bar{\mu}_v + \pi_{N0} \bar{\theta}(\rho \bar{\mu}_v + \bar{\mu}_v) \\ \pi_{N1} = \pi_{N-11} \theta p \bar{\mu}_v + \pi_{N-11} p \bar{\mu}_b + \pi_{N0} \theta(\rho \bar{\mu}_v + \bar{\mu}_v) + \pi_{N2}(\rho \bar{\mu}_b + \bar{\mu}_b) \end{cases}$$

将 π_{N-1} 代入上式即可得到 π_N , 从而定理得证。

3 系统的性能指标

①系统处于工作休息的概率

$$P_V = \sum_{k=0}^N \pi_{k0} = \sum_{k=0}^N K a^k = K \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a} + \delta_3 K a^{N-1}$$

②系统处于正常服务期的概率

$$P_B = \sum_{k=1}^N \pi_{k1} = \sum_{k=1}^{N-1} K b \sum_{j=0}^{k-1} a^j c^{k-1-j} + (\delta_1 + \delta_0 \delta_3) K a^{N-2} + \delta_2 K b \sum_{j=0}^{N-2} a^j c^{N-2-j}$$

③系统的队长分布和平均队长

系统的队长分布是

$$\begin{aligned} P\{L = 0\} &= \pi_{00} = K \\ P\{L = k\} &= \pi_{k0} + \pi_{k1}, \quad 1 \leq k \leq N - 1 \\ &= K a^k + K b \sum_{j=0}^{k-1} a^j c^{k-1-j} \end{aligned}$$

$$P\{L = N\} = \delta_3 K a^{N-1} + (\delta_1 + \delta_0 \delta_3) K a^{N-2} + \delta_2 K b \sum_{j=0}^{N-2} a^j c^{N-2-j}$$

系统的平均队长是

$$\begin{aligned} E(L) &= \sum_{k=1}^N k(\pi_{k0} + \pi_{k1}) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} kK(a^k + b \sum_{j=0}^{k-1} a^j c^{k-1-j}) \\ &\quad + NK(\delta_3 a^{N-1} + (\delta_1 + \delta_0 \delta_3) a^{N-2} + \delta_2 b \sum_{j=0}^{N-2} a^j c^{N-2-j}) \end{aligned}$$

④系统的平均等待对队长

$$\begin{aligned} E(W) &= \sum_{k=1}^{N-1} k(\pi_{k+1,0} + \pi_{k+1,1}) \\ &= \sum_{k=1}^{N-2} kK(a^{k+1} + b \sum_{j=0}^k a^j c^{k-j}) \\ &\quad + (N - 1)K(\delta_3 a^{N-1} + (\delta_1 + \delta_0 \delta_3) a^{N-2} \\ &\quad + \delta_2 b \sum_{j=0}^{N-2} a^j c^{N-2-j}) \end{aligned}$$

⑤顾客的消失概率

$$\begin{aligned} P_{Loss} &= \pi_{N0} + \pi_{N1} \\ &= K \left(\delta_3 a^{N-1} + (\delta_1 + \delta_0 \delta_3) a^{N-2} + \delta_2 b \sum_{j=0}^{N-2} a^j c^{N-2-j} \right) \end{aligned}$$

4 数值例子

通过以上的分析我们得到了系统的平均队长、平均等待队长及消失概率等性能指标。由于离散时间排队模型能够合理的代表许多系统, 尤其是数字通信系统, 所以本文中的模型可以应用到许多实际问题当中去, 但作为一个管理决策人员不仅要知道排队系统的稳态指标, 而且还要了解系统中的某些参数对这些稳态指标的影响, 从而尽可能达到最优。

下面图 1给出了系统平均队长随工作休假期服务率 μ_v 的变化趋势。图 2分析了消失概率随工作休假期服务率 μ_v 的变化规律。

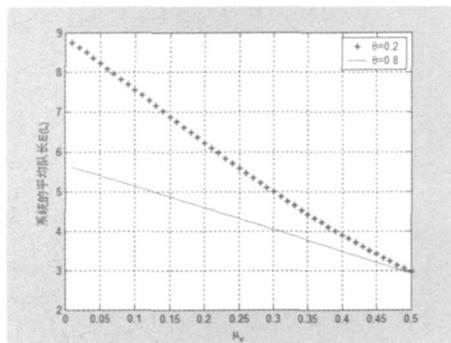


图 1 $E(L)$ 随 μ_v 的变化趋势

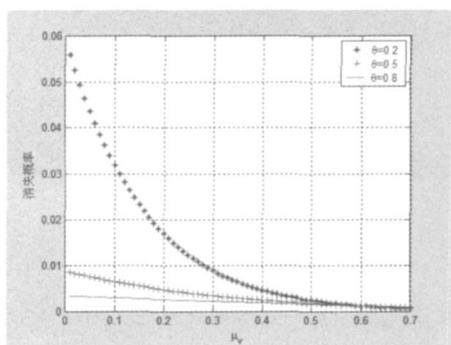


图 2 消失概率随的 μ_v 变化趋势

可以改变性能指标,提升系统的性能。

参考文献:

[1] Servi L, Finn S M /M /1 queue w ith working vacations (M /M /1/WV) [J]. Performance Evaluation 2002(50): 41-52

[2] Kim J Choi D, Chae K Analysis of queue length distribution of the M /G /1 queue w ith working vacations[A]. In Hawaii International Conference on Statistics and Related Fields[C]. 2003(6): 5-8

[3] Wu D, Takagi H. M /G /1 queue w ith multiple working vacations[J]. Proceedings of the queueing symposium, stochastic models and the applications, Kakegawa 2003 51-60

[4] Baba Y. Analysis of a GI/M /1 queue w ith multiple working vacation[J]. Oper Res Lett 2005(33): 201-209

[5] Liu W, Xu X, Tian N. Some results on the M /M /1 queue w ith working vacations[J]. Oper Res Letters 2007(35): 595-600

[6] Li J Tian N, Liu W. Discrete-time GI/Geo/1 queue w ith working vacations[J]. Queueing Systems 2007(56): 53-63

[7] 赵晓华, 樊剑武, 田乃硕, 等. M /M /1/N 多重工作休假排队系统的性能分析 [J]. 运筹与管理, 2009(18): 54-58

[8] 刘爱玲, 田乃硕, 郭明明. 工作休假的 Geo/Geo/1 排队 [J]. 工程数学学报, 2008 1059-1064

从而说明, 根据实际情形, 设置不同的 θ μ_v 等参数,

Performance Analysis of the Geom /Geom /1/N Queuing System with Multiple Working Vacations

LI Yan-ce¹, FENG Hu², XU Xu-li¹

(1. College of Science, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China

2. No. 1 Middle School of Changzhi County, Changzhi 047100, China)

Abstract In this paper, we consider a discrete time Geom /Geom /1/N queuing system with multiple working vacations. We obtain the distribution of the number of customers in the system by matrix-geometric solution method. Some performance measures of the system, such as the average number of the customers and the average waiting time of a customer and the loss probability in the stationary state are also presented. Finally, we verify the effect of the parameters of system on the average queue length and loss probability by numerical examples.

Key words discrete time queue, matrix-geometric solution method, multiple working vacations, finite buffer