文章编号: 1673-1549(2011)02-0168-03

一个高精度数值积分公式

许江浩[1], 陈志坤[2], 刘 斌[1]

(1.成都理工大学信息管理学院, 成都 610059; 2.吉林财经大学经济模拟研究所, 长春 130117)

摘 要: 文章对文一个高精度积分公式作改进,用四个点和它们的一阶导数做加权平均,使得该公式的代数精度由五阶提高到七阶,并对该公式进行复化,然后推广到二重积分。数值实验结果表明:改进后的公式比原来的积分公式具有更高的精度。

关键词: 数值积分; 复合公式; 高精度

中图分类号: O174.41 文献标识码: A

引 言

在数学和科学计算中,计算积分是一个非常重要的环节。一般来说,对于一维积分,已有不少效果不错的数值方法,比如牛顿—柯特斯公式,龙贝格求积公式[1-2]等,但对多维积分的高精度数值方法方面的研究工作,特别是一般区域上多维积分的高精度数值方法[3-4]还比较少。对于多维积分的计算,其主要困难在于,高维插值是尚未完全解决的问题,且多维积分区域比一维积分区域复杂得多,即便对多维规则区域,我们也很难获得象单重数值积分那样好的结果[6]。因此,研究多维积分的高精度数值公式更是一项有意义的工作。本文在文献[5]研究基础上构造了一种新的高精度积分公式,并进行了误差分析,推广到了二维积分,最后通过数值实验验证了新公式的有效性。

1 一个高精度的数值积分公式的构造

根据文献[5],我们想到利用积分区间上的四个点来构造求积公式。考虑如下的求积公式,记为(1):

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{3}\beta_i f_i + h^2\sum_{i=0}^{3}\gamma_i f_i + E[f] \qquad (1)$$

其中 $h=\frac{b-a}{3}$, $f_i=f(x_i)$, $f'_i=f'(x_i)$, $x_i=a+ih$, $i=0,1,2,3$,而 $E[f]$ 为求积公式(1)的余项。现需确定公式(1)中的系数 β_i, $\gamma_i(i=0,1,2,3)$,使其代数精度尽可能高。为此,令 $E[x^m]=0$, $m=0,1,2,\cdots,7$。通过计算求得: $\beta_0=\beta_3=\frac{93}{224}$, $\beta_1=\beta_2=\frac{243}{224}$, $\gamma_0=\frac{57}{1120}$, $\gamma_1=\frac{-81}{1120}$, $\gamma_2=\frac{81}{1120}$, $\gamma_3=\frac{-57}{1120}$ 于是我们得到求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{224}[93f_0+243f_1+243f_2+93f_3]$$

其代数精度为 7阶。根据广义皮亚诺(peano)定理,得余项

$$E[f]=\int_a^b\frac{f^{(8)}(\eta)}{8!}(x-a)^2(x-a-h)^2$$

作变换 $x=a+(t+1)h$,有

$$h^9\int_{-1}^{2}\frac{f^{(8)}(\xi)}{8!}(t+1)^2t^2(t-1)^2(t-2)^2dt$$

$$=h^9\frac{f^{(8)}(\eta)}{8!}\int_{-1}^{2}(t+1)^2t^2(t-1)^2(t-2)^2dt$$

$$=\frac{9h^9}{313600}f^{(8)}(\eta),\quad a<\eta<b \qquad (2)$$

2 高精度数值积分公式的复化

将 $[a,b]$ 区间 n等分,记 $h^*=\frac{b-a}{3n}$,分点为 $x_i=a+ih$, $i=0,1,2,\cdots,3n$ 在每个小区间 $[x_{3i-3},x_{3i}]$ 上应用公式(2),有

$$I_{3n}=\int_a^b f(x)dx$$

$$\approx\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{h^*}{224}[93f_{3i-3}+243f_{3i-2}+243f_{3i-1}+93f_{3i}]\right)$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{h^*}{1120}[57f'_{3i-3}-81f'_{3i-2}+81f'_{3i-1}-57f'_{3i}]\right)$$

$$I=\int_a^b f(x)dx=\frac{(b-a)}{672n}[93\sum_{i=0}^{n-1}f_{3i}$$

收稿日期: 2010-12-03

作者简介: 许江浩(1987-),男,浙江东阳人,硕士生,主要从事数学地质方面的研究。

$$+ 243\sum_{i=1}^{n} f_{3i-2} + 243\sum_{i=1}^{n} f_{3i-1} + 93\sum_{i=1}^{n} f_{3i}]$$

$$+ \frac{(b-a)^2}{10080n^2}[57f' - 81\sum_{i=1}^{n} f'$$

$$+ 81\sum_{i=0}^{n} f' - 57f'] + E[f] \qquad (3)$$

令

$$J_1 = \frac{93(b-a)}{672n}\sum_{i=0}^{n-1} f_{3i}$$

$$J_2 = \frac{243(b-a)}{672n}\sum_{i=1}^{n} f_{3i-2}$$

$$J_3 = \frac{243(b-a)}{672n}\sum_{i=1}^{n} f_{3i-1}$$

$$J_4 = \frac{93(b-a)}{672n}\sum_{i=1}^{n} f_{3i}$$

它们都是 $f(x)$ 相应于 $[a, b]$ 的分割 $[x_0, x_3]$, $[x_3, x_6]$, …, $[x_{3n-3}, x_{3n}]$ 的一个黎曼和, 由定积分定义知, 当 $n \to \infty$ 时, J_1, J_2, J_3, J_4 都收敛于积分 $\int_a^b f(x)dx$。令

$$L_1 = -\frac{81(b-a)^2}{10080}\sum_{i=1}^{n} f'_{3i-2}$$

$$L_2 = \frac{81(b-a)^2}{10080}\sum_{i=0}^{n} f'_{3i-1}$$

它们都是 $f'(x)$ 相应于 $[a, b]$ 的分割 $[x_0, x_3]$, $[x_3, x_6]$, …, $[x_{3n-3}, x_{3n}]$ 的一个黎曼和, 由定积分定义知, 当 $n \to \infty$ 时, L_1, L_2 都收敛于积分 $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$, 当 $n \to \infty$ 时, L_1, L_2 趋于 0。故当 $n \to \infty$ 时, (3)式右端收敛于 $\int_a^b f(x)dx$, 即复合公式(3)收敛。又假设 $f^{(8)}(\eta)$ 在 $[a, b]$ 内连续, 则复合求积公式(3)的余项为

$$E_{3n}[f] = \frac{9}{313600}h^{*} \cdot n \cdot f^{(8)}(\eta_1)$$

$$= \frac{9}{313600}\left(\frac{b-a}{3n}\right)^9 \cdot n \cdot f^{(8)}(\eta_1)$$

$$= \frac{(b-a)^9}{685843200n^8}f^{(8)}(\eta_1) \quad a < \eta_1 < b \qquad (4)$$

3 复化高精度数值积分公式的推广

考虑二重积分 $II = \iint f(x, y)dxdy$, 其中积分区域 D 为平面有界区域, 不失一般性, 考虑

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c(x) \leqslant y \leqslant d(x)\}$$

$c(x)$ 和 $d(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续可微函数, 且 $f(x, y)$ 在 D上充分光滑。记

$$g(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)dy$$

对于固定的 x, $g(x)$ 是单重积分, 且在 $[a, b]$ 上也是光滑函数。于是二重积分可以化为累次积分 $I = \int_a^b g(x)dx$

$$= \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)dy\right]dx$$

利用复合公式(3)可得:

$$I = \int_a^b g(x)dx = \frac{(b-a)}{672n}[93\sum_{i=0}^{n-1} g_{3i}$$

$$+ 243\sum_{i=1}^{n} g_{3i-2} + 243\sum_{i=1}^{n} g_{3i-1} + 93\sum_{i=1}^{n} g_{3i}]$$

$$+ \frac{(b-a)^2}{10080n^2}[57g'_a - 81\sum_{i=1}^{n} g'_{3i-2}$$

$$+ 81\sum_{i=0}^{n} g'_{3i-1} - 57g'_b] + E[g]$$

$$E[g] = \frac{(b-a)^9}{685843200n^8}g^{(8)}(\eta_2), \quad a < \eta_2 < b$$

对每个 $k = i$, $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$, 将区间 $[c(x_k), d(x_k)]$ 分成 $3m_k$ 个小区间, 记 $h_k = \frac{[d(x_k) - c(x_k)]}{3m}$, 分点为

$$y_j = c(x_k) + jh_k (j = 0, 1, 2, \cdots, 3m_k),$$

将 $g(x_k) = \int_{c(x_k)}^{d(x_k)} f(x_k, y)dy$ 在区间 $[c(x_k), d(x_k)]$ 上应用公式(3)有

$$g(x_k) = \int_{c(x_k)}^{d(x_k)} f(x_k, y)dy$$

$$= \frac{h_k}{224}[93\sum_{j=1}^{m_k} f(x_k, y_{3j-3}) + 243\sum_{j=1}^{m_k} f(x_k, y_{3j-2})$$

$$+ 243\sum_{j=1}^{m_k} f(x_k, y_{3j-1}) + 93\sum_{j=1}^{m_k} f(x_k, y_{3j})$$

$$+ \frac{h_k^2}{1120}[57\sum_{j=1}^{m_k} f_y(x_k, c(x_k)) - 81\sum_{j=1}^{m_k} f_y(x_k, y_{3j-1})$$

$$+ 81\sum_{j=1}^{m_k} f_y(x_k, y_{3j-2}) - 57f_y(x_k, d(x_k))] + E_{m_k}[f(x_k, y)]$$

$$k = 3i-3, 3i-2, 3i-1, 3i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\frac{dg}{dx}\Big|_{x=x_i} = \frac{d}{dx}\left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)dy\right]\Big|_{x=x_i}$$

$$= \int_{c(x_i)}^{d(x_i)} f_x(x_i, y)dy + f(x_i, d(x_i))d'(x_i)$$

$$- f(x_i, c(x_i))c'(x_i)$$

上式记为(5), 利用公式(3)和式(5)可得:

$$g'(x_k) = \frac{h_k}{224}[93\sum_{j=1}^{m_k} f_x(x_k, y_{3j-3}) + 243\sum_{j=1}^{m_k} f_x(x_k, y_{3j-2})$$

$$+ 243f_x(x_k, y_{3j-1}) + 93\sum_{j=1}^{m_k} f_x(x_k, y_{3j})]$$

$$+ \frac{h_k^2}{1120}[57\sum_{j=1}^{m_k} f_{xy}(x_k, c(x_k)) - 81\sum_{j=1}^{m_k} f_{xy}(x_k, y_{3j-1})$$

$$+ 81\sum_{j=1}^{m_k} f_{xy}(x_k, y_{3j-2}) - 57f_{xy}(x_k, d(x_k))]$$

$$+ f(x_i, d(x_i))d'(x_i) - f(x_i, c(x_i))c'(x_i)$$

$$+ E_{m_k}[f_x(x_k, y)]$$

其中

$$E_{m_k}[f(x_k, y)] = \frac{9h_k^9}{313600} \cdot m_k \cdot f_y^{8}(x_k, \eta_k),$$

$$c(x_k) \leqslant \eta_k \leqslant d(x_k),\ k = 0, 1, 2, \cdots, 3n$$

$$E_{m_k}[f_x(x_k, y)] = \frac{9h_k^9}{313600} \cdot m_k \cdot f_{xy^6}(x_k, \xi_k),$$

$$c(x_k) \leqslant \xi_k \leqslant d(x_k),\ k = 0, 1, 2, \cdots, 3n$$

上式记为(6),于是,我们得到:

$$I = \int_a^b g(x)dx = \frac{(b-a)}{672n}[93\sum_{i=0}^{n-1} g_{3i} + 243\sum_{i=1}^{n} g_{3i-2} + 243\sum_{i=1}^{n} g_{3i-1} + 93\sum_{i=1}^{n} g_{3i}] + \frac{(b-a)^2}{10080}[57g'_a - 81\sum_{i=1}^{n} g'_{3i-2} + 81\sum_{i=0}^{n} g'_{3i-1} - 57g'_b] + E_{mn}[f]$$

其中 $g(x_k)$ 和 $g'(x_k)$ 分别由(5)与(6)确定,

$$E_{mn}[f] = E_n[g] + \frac{h}{224}\{93\sum_{i=1}^{n} E_{m_{3i-3}}[f(x_{3i-3}, y)] + 243\sum_{i=1}^{n} E_{m_{3i-2}}[f(x_{3i-2}, y)]\} + \frac{h}{224}\{243\sum_{i=1}^{n} E_{m_{3i-1}}[f(x_{3i-1}, y)] + 93\sum_{i=1}^{n} E_{m_{3i}}[f(x_{3i}, y)]\} + \frac{h^2}{1120}\{57E_{m_0}[f_x(x, y)] - 81\sum_{i=1}^{n} E_{m_{3i-2}}[f_x(x_{3i-2}, y)]\} + \frac{h^2}{1120}\{81\sum_{i=1}^{n} E_{m_{3i-1}}[f_x(x_{3i-1}, y)] - 57E_{m_{3n}}[f_x(x_{3n}, y)]\}$$

4 数值实验

为了验证本文所写得各种高精度的数值积分公式的有效性,通过数值实验来验证:

算例 1:计算 $I = \int_0^1 \cos(x)dx$,结果如表 1:

表 1 新构造积分公式对算例 1的计算效果

辛普森公式[4]	柯特斯公式[4]
0.84146737607095	0.84147098880739
新构造的求积公式	积分精确值
0.84147098353781	0.84147098480790

算例 2:计算 $I = \int_0^1 \tan(x)dx$,结果如表 2:

表 2 新构造公式复化后对算例 2的计算效果

划分数 n	原算法(文[5]中)	新构造公式
5	0.61562615345523	0.61562646909467
10	0.61562646489321	0.61562647037995
15	0.61562646989340	0.61562647038577
20	0.61562647029766	0.61562647038599
精确值	0.61562647038601	

算例 3:计算 $I = \int_0^1 dx \int_0^1 e^{(x+y)} dy$,结果如表 3:

表 3 新构造公式推广后对算例 3的计算效果

划分数 n	原算法(文[5]中)	新构造的公式
5	2.95249244138848	2.95249244201254
10	2.95249244200280	2.95249244201256
15	2.95249244201170	2.95249244201256
20	2.95249244201241	2.95249244201256
精确值	2.95249244201256	

5 结 论

上述实验结果表明:在一维计算和一维复合计算中,新构造的求积公式比文献[5]中的积分公式计算精度要高;在二维计算中,新构造的求积公式也比文献[5]中的积分公式计算精度高。本文的不足之处在于没有得到余项的进一步的表达式,导致不能给出精度估计的表达式,此问题有待进一步地研究。

参 考 文 献:

[1] 李庆扬,王能超,易大义.数值分析:版[M].北京:清华大学出版社,2001.

[2] 齐治昌.数值分析及其应用[M].长沙:国防科技大学出版社,2004

[3] 复化Newtonian-Cote's公式及其误差[J].重庆三峡学院学报,2007,23(3):52-54

[4] 郑华盛,唐经纶,危地.高精度数值积分公式的构造及其应用[J].数学的实践与认识,2007,37(15):141-148

[5] 吴新元,吴宏伟.一个新的高精度二重数值积分公式[J].计算物理,1991,8(4):437-441

[6] 郭时光.第二类Fredholm积分方程的几种解法[J].四川理工学院学报:自然科学版,2007,20(5):50-53.

A Higher Order Accuracy Numerical Quadrature Rule

XU Jiang-hao[1], CHEN Zhi-kun[2], LIU Bin[1]

(1. College of Information Management, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China;

2. Institute of Economic Simulation, Jilin University of Finance and Economics, Changchun 130117, China)

Abstract: In this paper, it improved a high accurate integral formula by weighted average with four points and their first derivatives. The new formula has 7th order accurate. And then, we compound it to obtain the compound formula, and extend these formulas to the double integrals. Numerical results show that the new formulas have higher accurate.

Key words: numerical integration; compound formula; high order accuracy