文章编号: 1673-1549(2011)02-0162-03

一类非线性电报方程的概周期解

孟凡卉

(枣庄学院数学与信息科学系, 山东　枣庄　277160)

摘　要: 在微分方程的研究中, 上下解方法具有十分广泛的应用。文章利用该方法对一类非线性电报方程进行了定性分析, 结合概周期函数的知识找到了它的概周期解, 并利用上下解方法证明了该解在一定范围内的唯一性。

关键词: 非线性电报方程; 概周期解; 上下解方法

中图分类号: O175　　文献标识码: A

1　相关知识

电报方程是一种十分经典的数学物理方程, 它最初是在研究电报线上电压电流的变化规律时推导出来的。由于它具有很强的实际背景, 因此关于电报方程的研究很受重视, 成果也比较丰富。它的一般形式为:

$$u_{tt} - \Delta_x u + cu_t + \lambda u = p(t, x) \tag{1}$$

其中 $u \in D'(R \times T^n)$。Ortega, Robles-Pérez[1]和 Mawhin[2-3]研究了它的双周期解和 n=1, 2, 3时有界弱解的最大值原理, 并给出了高维中不能成立的例子。最近, 李永祥[4]又改进了 Ortega等人的结果。最大值原理在微分方程边值问题的研究中是非常有用的, 如果一个微分方程边值问题对应的线性方程具有最大值原理, 则上下解方法对该问题是适用的, 且可用上下解单调迭代求解。根据已有的结论, 我们将在本文中利用上下解方法来研究一类非线性电报方程:

$$u_{tt} - \Delta_x u + cu_t + g(u) = p(t, x) \tag{2}$$

其中 f和 g的条件将在文中稍候给出。我们找到了它的概周期解, 并得到了其在一定范围内的存在性与唯一性。本文中 n=1, 2, 3。

首先介绍一下本文用到的关于概周期解和上下解方法的相关知识。

2　预备知识

本文中, 我们用 $W^{1,\infty}(R \times T)$ 来表示 $L^{\infty}(R \times T)$ 中 Lipschitz连续的函数所组成的 $Banach$空间, 其范数为 $\|u\|_{W^{1,\infty}} = \|u\|_{L^{\infty}} + [u]_{Lip}$, 其中 $[u]_{Lip}$ 为 u 的最佳 Lipschitz 常数, $\|u(t, x)\|_{L^{\infty}} = \inf\limits_{E_0 \subset R \times T^n, m(E_0)=0} \{\sup\limits_{R \times T^n - E_0} |u(t, x)|\}$。以 E^n 表示 R^n 或 C^n, D是 E^n 中开集或 D$=E^n$, $C(R \times D, E^n)$ 表示定义在 $R \times D$ 上取值于 E^n 中的连续函数。D 上的全体广义函数(即连续线性泛函)所构成的向量空间记为 D', 它是 D 的拓扑对偶。

利用紧性准则来研究概周期函数的想法, 首先是由 Bochner在 1927年提出来的。

为叙述简便, Bochner在 1962年引进了简明记号 $\alpha = \{\alpha_i\}$, 以 α表示实数序列 $\{\alpha_i\}$。如果 $\lim\limits_{i \to \infty} f(t + \alpha_i, x) = g(t, x)$ 存在的话, 用 $T_\alpha f(t, x) = g(t, x)$ 来表示。此时我们称 T 为移位算子。我们用 $AP(R \times T^n)$ 表示 $R \times T^n$ 上所有概周期函数的集合, 在寻求微分方程的概周期解时经常要利用点态定义, 下述的定义和定理给出了概周期函数的点态定义。

定义 2.1[5]　对于函数 $f(t, x) \in C(R \times D, R^n)$, 如果对每一实数序列 $\{\alpha_i\}$, 总能找出子序列 $\{\alpha_i\}$, 使 $\lim\limits_{i \longrightarrow \infty} f(t + \alpha_i, x)$ 在 $R \times S$ 上一致的成立, 则称 $f(t, x)$ 关于 t是 Bochner一致概周期的, 其中 S为 D中任一紧集。

定理 2.1[6]　连续函数 $f(t, x) \in AP(R \times T^n)$ 的充要条件是对每一实数序列 α'和 β'都存在公共子序列 $\alpha \subset \alpha'$, $\beta \subset \beta'$ (即子列有相同的下标), 使对每一 $(t, x) \in R \times S$ 有 $T_{\alpha+\beta} f(t, x) = T_\alpha T_\beta f(t, x)$。

收稿日期: 2010-12-20

基金项目: 枣庄学院青年项目 (2009QN43)

作者简介: 孟凡卉 (1978-), 女, 山东临沂人, 助教, 硕士, 主要从事微分方程定性理论方面的研究。

定义 2.2[2] 我们称 $u^* \in L^\infty(R\times T^n)$ 为

$$Lu \equiv u_{tt}-u_{xx}+cu_t=F(t,x,u) \tag{3}$$

的一个上(下)解。若它在 $D'(R\times T^n)$ 上满足

$$Lu^* \geqslant F(t,x,u^*),\ (Lu_* \leqslant F(t,x,u_*))$$

即

$$\int_{R\times T^n} u_* L^*\varphi \geqslant \int_{R\times T^n} F(t,x,u_*)\varphi$$

$$\left(\int_{R\times T^n} u_* L^*\varphi \leqslant \int_{R\times T^n} F(t,x,u_*)\varphi\right)$$

定理 2.2[2] 若 u^* 和 u_* 分别是(3)的上、下解,且有 $u_* \leqslant u^*$, a.e. $(t,x)\in R\times T^n$, 假设

$$\frac{F(t,x,u_1)-F(t,x,u_2)}{u_1-u_2} \geqslant -\frac{c^2}{4}$$

其中

$$u_*(t,x)\leqslant u_2 < u_1 \leqslant u^*(t,x)$$

$$a.e.\ (t,x)\in R\times R^n$$

那么(3)有一个解 $u\in W^{1,\infty}(R\times T^n)$, 且满足 $u_* \leqslant u \leqslant u^*$。

3 主要结论

下面我们考虑如下形式的一类常见广义电报方程:

$$u_{tt}-\Delta_x u+cu_t+g(u)=p(t,x) \tag{2}$$

其中

$g(u)=a_1u+a_2u^{\frac{2n+1}{2m+1}}$, $(m,n\in Z^+;\ n\geqslant m)$ 系数满足下列条件:

$$0< a_1+\frac{2n+1}{2m+1}a_2 \leqslant \frac{c^2}{4};\quad a_1>0,\ a_2\geqslant 0$$

引理 3.1 关于 R 的方程 $g(R)=a_1R+a_2R^{\frac{2n+1}{2m+1}}=\|p\|_{L^\infty}$ 有唯一的正解。

证明

令 $F(R)=a_1R+a_2R^{\frac{2n+1}{2m+1}}-\|p\|_{L^\infty}$

则上面方程的正解即为 $F(R)=0$ 的正根。由于

$$F'(R)=a_1+\frac{2n+1}{2m+1}a_2R^{\frac{2(n-m)}{2m+1}}>0$$

所以函数是严格单调递增的。$F(0)=-\|p\|_{L^\infty}<0$, 易知存在一个大的正数 M, 使得 $F(M)>0$, 故由连续函数的性质知必存在唯一的正数 R^* 使得 $F(R^*)=0$, 所以上述方程有唯一的正解 R^*。

引理 3.2 若 $a_1+\frac{2n+1}{2m+1}a_2R^* \leqslant \frac{c^2}{4}$, 则方程(2)至少有一个弱解 $u\in W^{1,\infty}(R\times T^n)$ 且 $\|u\|_{L^\infty} \leqslant R^*$。

证明 根据上面 R^* 的定义可知 $u\equiv R^*$ 是 $u_{tt}-\Delta_x u+cu_t=p(t,x)-g(u)$ 的一个上解, 则 $u\equiv -R^*$ 即为它的一个下解。对于 $-R^*=u_*(t,x)\leqslant u_2<u_1\leqslant u^*(t,x)=R^*$, a.e. $(t,x)\in R\times R^n$,

$$\frac{F(t,x,u_1)-F(t,x,u_2)}{u_1-u_2}$$

$$=\frac{p(t,x)-a_1u_1-a_2u_1-p(t,x)+a_1u_2+a_2u_2}{u_1-u_2}$$

$$=-\frac{a_1(u_1-u_2)+a_2(u_1-u_2)}{u_1-u_2}$$

$$=-\left(a_1+\frac{2n+1}{2m+1}a_2u'^{\frac{2(n-m)}{2m+1}}\right)$$

(u' 介于 u_2 与 u_1 之间)

$$\geqslant -\left(a_1+\frac{2n+1}{2m+1}a_2R^*\right)\geqslant -\frac{c^2}{4}$$

由定理 1.2可得(2)有一个解 $u\in W^{1,\infty}(R\times T^n)$, 且满足 $u_*\leqslant u\leqslant u^*$。引理证毕。

定理 3.3[2] 函数 $\alpha(t,x)\in L^\infty(R\times T^n)$ 若其满足: $0\leqslant \alpha(t,x)\leqslant c^2$, a.e. $(t,x)\in R\times R^n$。

那么方程

$$u_{tt}-u_{xx}+cu_t+\alpha(t,x)u=0$$

只有零解。

下面我们来证明上述(2)的弱解是唯一的, 即:

定理 3.1 考虑方程(2), 若 $a_1+\frac{2n+1}{2m+1}a_2R^* \leqslant \frac{c^2}{4}$, 则方程(2)的弱解是唯一的。

证明 设 u_1, u_2 为(2)的两个解, 则

$$u_1-u_1+cu_1+a_1u_1+a_2u_1=p(t,x), \tag{4}$$

$$u_2-u_2+cu_2+a_1u_2+a_2u_2=p(t,x)。 \tag{5}$$

(4) − (5)得 $(Lu=u_{tt}-u_{xx}+cu_t)$:

$$L(u_1-u_2)+a_1(u_1-u_2)+a_2(u_1-u_2)=0$$

$$L(u_1-u_2)+\left(a_1+\frac{2n+1}{2m+1}a_2u'^{\frac{2(n-m)}{2m+1}}\right)$$

$(u_1-u_2)=0$ u' 介于 u_2 与 u_1 之间。

故只须证明下述方程仅有零解。

$$L\nu+\left(a_1+\frac{2n+1}{2m+1}a_2u'^{\frac{2(n-m)}{2m+1}}\right)\nu=0 \tag{6}$$

取 $\alpha(t,x)=a_1+\frac{2n+1}{2m+1}a_2u'^{\frac{2(n-m)}{2m+1}}$, 则

$$0<a_1\leqslant a_1+\frac{2n+1}{2m+1}a_2u'^{\frac{2(n-m)}{2m+1}}$$

$$\leqslant a_1+\frac{2n+1}{2m+1}a_2R^*$$

$$\frac{c^2}{4}<c^2$$

由引理 2.3可知方程(6)仅有零解, 即 $u_1\equiv u_2$, 所以方程(2)的弱解是唯一的。定理证毕。

下面我们得到本文的主要结论:

定理 3.2 对于方程(2), 若 $c>0$, $a_1>0$, $a_2\geqslant 0$, $0<a_1+\frac{2n+1}{2m+1}a_2\leqslant\frac{c^2}{4}$; $p(t,x)\in AP(R\times T^n)$, 则方程(2)有唯一的概周期解 $u(t,x)$, 且 $\|u\|_{L^\infty}\leqslant R^*$。

证明 由定理 2.1可知,方程(2)有唯一的解 $u(t, x)$,且 $\| u\|_{L^\infty} \leqslant R^*$,下面我们只须证明 $u(t, x)$为概周期解即可。

因为 $\| u\|_{L^\infty} \leqslant R^*$,由紧性性质可得,对于任意实数列 α', β',都存在 α', $\alpha' + \beta'$的子序列 $\alpha'' \subset \alpha'$, $\alpha'' + \beta'' \subset \alpha' + \beta'$,使 $T_{\beta''}u$, $T_{\alpha''+\beta''}u$在 $R \times T^n$的任一紧集上一致的存在且收敛于连续函数记为 $u_{\beta''}$, $u_{\alpha''+\beta''}$。

由于 $p(t, x)$为概周期函数,根据定义 1.1可知存在 α'', $\alpha'' + \beta''$的子序列 $\alpha \subset \alpha''$, $\alpha + \beta \subset \alpha'' + \beta''$,使 $T_\beta p$, $T_{\alpha+\beta}p$在 $R \times T^n$的任一紧集上一致的存在且收敛于连续函数记为 p_β, $p_{\alpha+\beta}$,则

$$u_\beta - u_\beta + cu_\beta + a_1 u_\beta + a_3 u_\beta + a_5 u_\beta = p_\beta(t, x) \quad (7)$$

$$u_{\alpha+\beta} - u_{\alpha+\beta} + cu_{\alpha+\beta} + a_1 u_{\alpha+\beta} + a_3 u_{\alpha+\beta} + a_5 u_{\alpha+\beta} = p_{\alpha+\beta}(t, x) \quad (8)$$

对于(7)关于序列 α''做类似的讨论,α''存在子序列 $\alpha \subset \alpha''$,使得 $T_\alpha T_\beta u$, $T_\alpha T_\beta p$在 $R \times T^n$的任一紧集上一致的存在且收敛于连续函数记为 $u_{\alpha\beta}$, $p_{\alpha\beta}$,则

$$u_{\alpha\beta} - u_{\alpha\beta} + cu_{\alpha\beta} + a_1 u_{\alpha\beta} + a_3 u_{\alpha\beta} + a_5 u_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}(t, x) \quad (9)$$

由定理 1.1可得 $p_{\alpha+\beta}(t, x) = p_{\alpha\beta}(t, x)$,又由定理 2.1知方程(2)有唯一解,故

$$u_{\alpha\beta} = u_{\alpha+\beta}, \text{即 } T_{\alpha\beta}u = T_{\alpha+\beta}u$$

再由定理 1.1知 $u(t, x)$是概周期函数。所以方程(2)有唯一的概周期解 $u(t, x)$,且 $\| u\|_{L^\infty} \leqslant R^*$。定理证毕。

本定理也可以用压缩映像原理和最大值原理去证明。

据定理 2.2可以推得很多类似形式的非线性电报方程的概周期解。如(2)中的 $g(u) = a_1 u + a_2 u^3 + a_3 u^5 + a_4 u^7$或 $g(u) = a_1 u + a_2 u^{\frac{5}{3}} + a_3 u^{\frac{7}{3}} + a_4 u^{\frac{11}{3}}$时,对于以上形式,可以用同样的方法推得其概周期解的存在性及在一定范围内的唯一性。

参考文献:

[1] OrtegaR, Robles-Pérez A M. A maximum principle for periodic solutions of the telegraph equation[J]. J Math Anal Appl, 1998, 221: 625-651.

[2] Mawhin J, Ortega R, Robles-Pérez A M. A maximum principle for bounded solutions of the telegraph equations and applications to nonlinear forcings[J]. J Math Anal Appl, 2000, 251: 695-709.

[3] Mawhin J, Ortega R, Robles-Pérez A M. Maximum principle for bounded solutions of the telegraph equation in space dimensions two and three and applications[J]. J Differential Equations, 2005, 208: 42-63.

[4] 李永祥.电报方程双周期解的极大值原理与强正性估计及应用[J].数学学报, 2007, 50(4): 895-908.

[5] 何崇佑.概周期微分方程[M].北京:高等教育出版社, 1992.

[6] 朴大雄,邱汶华.一类广义 Sine-Gordon方程的概周期解[J],中国海洋大学学报, 2006, 36(6): 892-894.

[7] 邱汶华.一类时滞摆方程的伪概周期解[J].佛山科学技术学院学报, 2010, 28(3): 15-17.

[8] 邱汶华.一类非线性摆方程的伪概周期解[J].廊坊师范学院学报, 2010, 10(3): 15-16.

[9] 钟太勇,邓乐斌,余晓娟.不动点定理在微分方程中的进一步研究[J].四川理工学院学报:自然科学版, 2010, 23(2): 147-148.

Almost Periodic Solutions of the Nonlinear Telegraph Equation

MENG Fan-hui

(Mathematics Department of Zaozhuang University, Zaozhuang 277160, China)

Abstract The method of upper and lower solutions is widely applied in research of the differential equation. In this paper, we studied the nonlinear telegraph equation. The almost periodic solution was found, and we also got its uniqueness. The crucial tools in the proofs are almost periodic functions and the method of upper and lower solutions.

Key words nonlinear telegraph equation; almost periodic solution; the method of upper and lower solutions